

**Die Erweiterung der VTB für  
allgemeine dünnwandige Querschnitte  
sowie die Lösung des  
Differentialgleichungssystems mit  
Potenzreihen**

Dr.-Ing. Andreas Haakh

2. Dezember 2007

Dieses Buch wurde in seiner ursprünglichen Fassung vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation dem Fachbereich für Bauingenieurwesen und Geodäsie der Technischen Universität Darmstadt zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs vorgelegt.

Referent:

Prof. Dr.-Ing. R. Schardt

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann

Tag der Einreichung:

22. April 2004

Tag der mündlichen Prüfung:

28. Juni 2004

# Vorwort

Die Idee zu dieser Arbeit und wesentliche Teile ihrer Umsetzung entstanden während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Statik der Technischen Hochschule Darmstadt (heute Institut für Werkstoffe und Mechanik im Bauwesen der Technischen Universität Darmstadt).

Ohne meinen Lehrer, Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Schardt, dem ich an dieser Stelle ganz ausdrücklich danke und der mein Interesse an der VTB (deren Genialität mich von Beginn an faszinierte) weckte, wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Er hat mich in all den Jahren, in denen die Tätigkeit an diesem Thema ruhte, stets dazu motiviert, daran weiterzuarbeiten. Aus unseren Gesprächen gingen viele konstruktive Anregungen hervor.

Ich danke auch Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Gruttmann, der bereitwillig das Korreferat übernommen hat – eine nicht ganz leichte Aufgabe in diesem Spezialgebiet.

Weiterhin gilt mein besonderer Dank dem Kollegen Manfred Hanf, mit dem ich am Institut, danach bei unserem gemeinsamen Arbeitgeber und auch nachdem sich unsere Wege getrennt hatten, rege und fruchtbare Diskussionen zu diesem Thema geführt habe. Er war es auch, der mich auf die Idee mit der Reihenentwicklung gebracht hatte.

Zuletzt danke ich meiner Frau, Irina Haakh, die mich sehr darin bestärkt hat, die Arbeit doch noch zu Ende zu bringen. Ohne ihre tatkräftige Unterstützung wäre dies nicht möglich gewesen.



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Überblick über die VTB</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1      | Bezeichnungen . . . . .   | 3         |
| 2.2      | Voraussetzungen . . . . .   | 7         |
| <b>3</b> | <b>Das Scheibenproblem</b>  | <b>9</b>  |
| 3.1      | Die Auswahl der Spannungs- und Verformungsansätze . . . . .                             | 9         |
| 3.2      | Die Dehnungen und Spannungen der Scheibenverformungsansätze . . . . .                   | 11        |
| 3.3      | Die Ermittlung der inneren Arbeiten . . . . .   | 12        |
| <b>4</b> | <b>Das Plattenproblem</b>   | <b>15</b> |
| 4.1      | Der Ansatz für die Funktion $f(s)$ . . . . .  | 15        |
| 4.2      | Die Dehnungen und Spannungen des Plattenproblems . . . . .                              | 17        |
| 4.3      | Die Ermittlung der inneren Arbeiten des Plattenproblems . . . . .                       | 18        |
| <b>5</b> | <b>Die Ermittlung der Querschnittswerte</b>   | <b>21</b> |
| 5.1      | Die Grundzustände für Querschnitte mit Umfangsdehnungen und Schubverformungen . . . . . | 21        |
| 5.2      | Der Ausschluss von Freiheitsgraden . . . . .  | 23        |
| 5.2.1    | Die Elimination der Umfangsdehnungen . . . . .  | 23        |
| 5.2.2    | Die Elimination der Membranschubverformungen . . . . .                                  | 25        |
| 5.2.3    | Die Transformation der Membranschubverformungen . . . . .                               | 27        |
| 5.2.4    | Die Elimination der Knotenverdrehungen . . . . .  | 29        |
| 5.3      | Die kontinuierliche Lagerung des Querschnitts . . . . .                                 | 31        |
| 5.3.1    | Die Pendelstäbe . . . . .   | 32        |
| 5.3.2    | Die verschiebliche Einspannung an Knoten . . . . .                                      | 32        |
| 5.3.3    | Die verschiebliche Einspannung der Scheiben . . . . .                                   | 32        |
| 5.4      | Die Querschnittssteifigkeiten . . . . .   | 32        |
| 5.5      | Die Ermittlung der Einheitszustände durch Orthogonalisierung . . . . .                  | 37        |
| 5.6      | Die Verläufe der Scheibenspannungen aus elementarem Gleichgewicht . . . . .             | 38        |
| 5.6.1    | Die Berechnung der Scheibenschubspannungen . . . . .                                    | 38        |
| 5.6.2    | Der Verlauf der Umfangsspannungen . . . . .   | 41        |
| <b>6</b> | <b>Die Querschnittswerte Theorie 2. Ordnung</b>   | <b>43</b> |
| 6.1      | Die kinematischen Dehnungen . . . . .   | 43        |
| 6.2      | Die Arbeiten an den kinematischen Dehnungen . . . . .                                   | 44        |
| 6.3      | Die Definition der Kappa-Werte . . . . .  | 45        |
| 6.4      | Die Anteile der Theorie 2. Ordnung in der Differentialgleichung . . . . .               | 46        |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>7</b>  | <b>Die Lösungen des Differentialgleichungssystems</b>  | <b>47</b> |
| 7.1       | Die homogene Lösung . . . . .  | 48        |
| 7.1.1     | ...nach Theorie 1. Ordnung . . . . .   | 48        |
| 7.1.2     | ...nach Theorie 2. Ordnung . . . . .   | 49        |
| 7.2       | Die Partikularlösung . . . . .   | 53        |
| 7.3       | Die Lösung der Differentialgleichung $n$ . Ordnung im Programm . . . . .                         | 54        |
| 7.4       | Betrachtungen zur Konvergenz . . . . .   | 56        |
| <b>8</b>  | <b>Das Weggrößenverfahren</b>  | <b>57</b> |
| 8.1       | Die Definition der Weggrößen . . . . .   | 57        |
| 8.2       | Die Definition der Schnittgrößen . . . . .   | 57        |
| 8.3       | Die Ermittlung der Stabsteifigkeitsmatrizen . . . . .  | 58        |
| 8.4       | Der Vektor der Zwangsschnittgrößen . . . . .   | 60        |
| 8.5       | Die Lagerungsbedingungen und Lagerreaktionen . . . . .   | 61        |
| 8.5.1     | Die Beschreibung der Lagerungsbedingungen . . . . .  | 63        |
| 8.5.2     | Die interne Behandlung der Lagerungsbedingungen . . . . .  | 65        |
| 8.5.3     | Die Matrix der Abhängigkeiten . . . . .  | 67        |
| 8.5.4     | Die Berücksichtigung von Knotenfedern . . . . .  | 68        |
| 8.6       | Die Einarbeitung der Lagerungsbedingungen . . . . .  | 69        |
| 8.6.1     | ...in die Steifigkeitsmatrix . . . . .   | 70        |
| 8.6.2     | ...in die rechten Seiten und Lösungsvektoren . . . . .   | 70        |
| 8.6.3     | ...in die Federsteifigkeitsmatrix . . . . .  | 71        |
| 8.7       | Der Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix . . . . .  | 71        |
| 8.8       | Die Rückrechnung der Schnittgrößen . . . . .   | 73        |
| 8.9       | Die Berechnung der Lagerreaktionen . . . . .   | 73        |
| 8.10      | Die Lösung des Verzweigungsproblems . . . . .  | 74        |
| <b>9</b>  | <b>Die Arbeitsausdrücke</b>  | <b>77</b> |
| 9.1       | ...nach Theorie 1. Ordnung . . . . .   | 77        |
| 9.1.1     | Die Scheibenanteile . . . . .  | 77        |
| 9.1.2     | Die Plattenanteile . . . . .   | 78        |
| 9.1.3     | Die Federanteile . . . . .   | 78        |
| 9.2       | ...nach Theorie 2. Ordnung . . . . .   | 79        |
| <b>10</b> | <b>Zusammenfassung</b>   | <b>81</b> |
| <b>A</b>  | <b>Beispiele</b>   | <b>83</b> |
| A.1       | Das Kipp-Problem am Beispiel eines HE 120 A . . . . .  | 83        |
| A.2       | Das Schubbeulen am wölbfreien Kastenprofil . . . . .   | 91        |
| A.3       | Die Platte mit Einzelstütze . . . . .  | 95        |
| A.4       | Parameterstudie an einem Kastenprofil mit abgeschrägten Ecken . . . . .                          | 97        |
| A.5       | Der Einfluss der Schubverformung auf das Stabilitätsverhalten sickerversteifter Bleche . . . . . | 102       |
| A.5.1     | Beispiel V-Sicke . . . . .   | 102       |
| A.5.2     | Beispiel Schräg-Sicke . . . . .  | 106       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>B</b> | <b>Programmbeschreibung</b>   | <b>111</b> |
| B.1      | Das Programmsystem . . . . .  | 111        |
| B.1.1    | Das Querschnittswertprogramm . . . . .                                  | 112        |
| B.1.2    | Der Differentialgleichungslöser für den Reihenansatz . . . . .          | 117        |
| B.1.3    | Der spezielle Differentialgleichungslöser für den Sinusansatz . . . . . | 123        |
| B.2      | Die Variablen des Programmsystems . . . . .                             | 124        |
| B.2.1    | ...für die Querschnittswerte . . . . .                                  | 125        |
| B.2.2    | ...für die Lösung der Differentialgleichung . . . . .                   | 127        |
| B.3      | Die weitere Entwicklung des Programmsystems . . . . .                   | 131        |
|          | <b>Literatur</b>  | <b>133</b> |

# Abbildungsverzeichnis

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Lokale und globale Koordinaten am Querschnittssegment . . . . .   | 4  |
| 3.1 | Scheibenelement der Breite $b$ und der Länge $\Delta x$ . . . . .   | 10 |
| 3.2 | Die gewählten Scheibenverformungsansätze mit $V' = const.$ . . . . .  | 10 |
| 4.1 | Plattenelement der Breite $b$ und der Dicke $t$ . . . . .   | 15 |
| 4.2 | Die gewählten Plattenverformungsansätze mit $V = const.$ . . . . .  | 16 |
| 5.1 | Die allgemeinen Grundzustände . . . . .   | 22 |
| 5.2 | Die Grundzustände nach Elimination der Umfangsdehnungen . . . . .   | 24 |
| 5.3 | Die Grundzustände nach Elimination der Umfangsdehnungen und Membranschubverformungen . . . . .  | 26 |
| 5.4 | Die Grundzustände nach Elimination der Umfangsdehnungen, Membranschubverformungen und Knotenverdrehungen . . . . .                          | 30 |
| 5.5 | Die Grundzustände nach Lagerung durch einen um 30 Grad gegen die Horizontale geneigten Pendelstab am linken oberen Knoten . . . . .         | 33 |
| 5.6 | Die Grundzustände nach Einarbeitung einer unverschieblichen Einspannung am oberen rechten Knoten . . . . .                                  | 34 |
| 5.7 | Die Grundzustände nach Einarbeitung einer verschieblichen Einspannung der oberen Scheibe . . . . .  | 35 |
| 5.8 | Scheibenelement mit Spannungen (Abmessungen $dx$ , $t$ und $ds$ ) . . . . .   | 38 |
| 6.1 | Kinematische Verzerrungen infolge Plattenverformungen . . . . .   | 43 |
| 8.1 | Diskrete Lagerung einer Stützstelle mit Pendelstab (1-wertig), Verschieblicher Lagerung (2-wertig) und Fester Lagerung (3-wertig) . . . . . | 64 |
| 8.2 | Belegung einer Gesamtsteifigkeitsmatrix für 3 Felder mit 1, 3 und 2 Segmenten im vollen und bandsymmetrischen Speichermodus . . . . .       | 72 |
| A.1 | Zustandsgrößen (Eigenform) mit Wölb-, Platten- und Schubfreiheitsgraden unter Momentenverlauf 2. . . . .                                    | 85 |
| A.2 | Zustandsgrößen (Th. 1. O.) mit Wölb-, Platten- und Schubfreiheitsgraden unter Momentenverlauf 3. . . . .                                    | 86 |
| A.3 | Einheitszustände HE 120 A mit Wölb- und Plattenfreiheitsgraden. . . . .   | 87 |
| A.4 | Einheitszustände HE 120 A mit Wölb-, Platten- und Schubfreiheitsgraden. . . . .   | 90 |
| A.5 | Beulfigur des Kastenprofils. . . . .  | 91 |
| A.6 | Einheitszustände Kastenprofil mit Wölb- und Plattenfreiheitsgraden. . . . .   | 93 |
| A.7 | Berechnungsergebnisse aus Beulprogramm. . . . .   | 94 |
| A.8 | Einheitszustände der gelagerten Platte. . . . .   | 95 |
| A.9 | Verformungsfigur der Platte. . . . .  | 96 |

|  |     |
|--|-----|
| A.10 Die Beulformen eines quadratischen Kastenprofils unter Längskraftbelastung. a) $b^*/b = 0.10$ b) $b^*/b = 0.05$ . . . . .         | 97  |
| A.11 Einheitszustände des Kastenprofils ohne Schubverformung. . . . .  | 99  |
| A.12 Einheitszustände des Kastenprofils mit Schubverformung. . . . .   | 100 |
| A.13 Stabilitätsverhalten eines Stabes mit quadratischem Kastenquerschnitt und abgeschrägten Ecken. $b_{ges}/t = 2b/t = 200$ . . . . . | 101 |
| A.14 Beulformen eines mit einer V-Sicke ausgesteiften Bleches. $b/t = 100$ , a) $h/b = 0.05$ , b) $h/b = 0.08$ . . . . .               | 103 |
| A.15 Zum Stabilitätsverhalten eines mit V-Sicke ausgesteiften Bleches. . . . .   | 103 |
| A.16 Einheitszustände des Querschnitts mit V-Sicke ohne Schubverformung. . . . .   | 104 |
| A.17 Einheitszustände des Querschnitts mit V-Sicke mit Schubverformung. . . . .  | 105 |
| A.18 Beulformen eines mit Schrägsicke ausgesteiften Bleches. . . . .   | 106 |
| A.19 Zum Stabilitätsverhalten eines mit Schräg-Sicke ausgesteiften Bleches. . . . .  | 107 |
| A.20 Einheitszustände des Querschnittes mit Schräg-Sicke ohne Schubverformung. . . . .   | 108 |
| A.21 Einheitszustände des Querschnittes mit Schräg-Sicke mit Schubverformung. . . . .  | 109 |
|  |     |
| B.1 Flussdiagramm des Programms QEP . . . . .  | 113 |
| B.2 Flussdiagramm des Unterprogramms <code>qep_ah_z</code> . . . . .   | 115 |
| B.3 Flussdiagramm des Unterprogramms <code>qep_orth</code> . . . . .   | 116 |
| B.4 Flussdiagramm des Programms DPL . . . . .  | 118 |
| B.5 Flussdiagramm des Unterprogramms <code>dpl_sub</code> . . . . .  | 119 |
| B.6 Flussdiagramm des Unterprogramms <code>dpl_gst</code> . . . . .  | 121 |

# Tabellenverzeichnis

|     |  |    |
|-----|--|----|
| A.1 | Durchbiegungen in Feldmitte – HE 120 A, $\ell = 300$ cm . . . . .          | 84 |
| A.2 | Verzweigungsspannungen und -momente – HE 120 A, $\ell = 300$ cm . . . . .  | 84 |
| A.3 | Querschnittswerte HE 120 A mit Wölb- und Plattenfreiheitsgraden – Teil 1 . | 88 |
| A.4 | Querschnittswerte HE 120 A mit Wölb- und Plattenfreiheitsgraden – Teil 2 . | 89 |

# 1 Einführung

Ausgehend von der von Schardt [28] dargestellten Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie sind im Laufe der Jahre einige Arbeiten entstanden, die als Ziel die Erweiterung dieser Theorie um weitere Verformungsansätze hatten. So stammt von Miosga [22] im Rahmen der Behandlung nichtlinearer Geometrie die Ergänzung um die Plattenfreiheitsgrade, die seither einen angestammten Platz in der VTB gefunden haben.

Anders sieht es mit dem von Saal, G. [26] und Möller [23] behandelten Freiheitsgrad Schubverformung und den bei Girmscheid [9] zusätzlich berücksichtigten Umfangsdehnungen aus. In den letzteren Arbeiten werden die zu den Membranschubverzerrungen gehörenden Verwölbungen mit eigenen Verformungsfunktionen versehen, sodass dadurch zwei Systeme von miteinander verkoppelten Differentialgleichungen entstehen, die nicht mehr in das Lösungsschema der verallgemeinerten und klassischen Technischen Biegetheorie fallen und daher immer Speziallösungen der VTB darstellten.

Zusätzlich stellten diese Arbeiten nur in Sonderfällen eine Erweiterung dar, da zum Beispiel geschlossene und verzweigte Querschnitte nur unter Berücksichtigung der Schubverformungen nachzurechnen waren.

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, eine gemeinsame Basis für die Auswahl unterschiedlicher Verformungsansätze zu finden. Nicht nur die bereits aufgeführten Verformungsansätze sondern auch die von Wlassow [32] bzw. Girkmann [8] berücksichtigten Verdrehungen der Knotenlinien sollten zur Anwendung kommen. Dabei lag der Erfolg in der systematischen Wahl der Verformungsansätze begründet. Die Verwölbung wird immer über die erste Ableitung der Verformungsfunktion beschrieben und die Verschiebungen in der Querschnittsebene über die Funktion selber. Daher ergibt sich immer ein System von Differentialgleichungen 4. Ordnung. Ausgehend von dem allgemeinsten Fall, einem Querschnitt mit Membranschubverzerrungen, Umfangsdehnungen und Verdrehungen der Knotenlinien musste es doch möglich sein, durch Elimination von Verformungsansätzen auf die jeweils niedrigere Stufe zu gelangen. Es gelang nicht nur diese Überlegung erfolgreich umzusetzen, sondern zusätzlich die Behandlung geschlossener Zellen mit dem Bredt'schen Kreisschubfluss bei Ausschluss von Membranschubverzerrungen zu berücksichtigen. Es steht dem Benutzer somit frei, je nach Bedarf die erforderlichen Freiheitsgrade auszuwählen.

Bei der Lösung der Differentialgleichungen wurden schon eine Reihe von Wegen unterschiedlichster Art beschritten. So hat sich der Sinusansatz bei der Untersuchung von Beulwerten hervorragend bewährt. Das Differenzenverfahren hat wegen seiner Universalität einen festen Platz in der Reihe der Lösungsverfahren gefunden. Bei Problemen nach Theorie 1. Ordnung oder bei konstanten Schnittkraftverläufen nach Theorie 2. Ordnung stellt die geschlossene Lösung [11] eine Alternative dar.

Da die Idee einer exakten oder zumindest numerisch exakten Lösung des Differentialgleichungssystems schon seit geraumer Zeit mein Interesse gefangen hielt, war es ein Anstoß von M. Hanf, der mich letztendlich dazu bewog, das auch von Rubin [25] verwendete Verfahren der Reihenentwicklung für ein System von Differentialgleichungen anzuwenden. Da

## *1 Einführung*

es ermöglicht auch variable Koeffizienten bei allen Ableitungsstufen zu berücksichtigen, ist es möglich die Lösungen nach Theorie 2. Ordnung oder für das Verzweigungsproblem exakt zu bestimmen. Sie hängen nur von der Beschreibung der Vorlasten ab. Um diese möglichst gut mit einem vernünftigen Aufwand zu berechnen, werden die Schnittgrößen nach Theorie 1. Ordnung durch ein Polynom begrenzten Grades beschrieben.

# 2 Überblick über die VTB

Der folgende Überblick über die VTB, wie sie in [30] ausführlich beschrieben ist, beginnt mit einer Zusammenstellung der wichtigsten Abkürzungen. Die Voraussetzungen der allgemeinen Theorie werden genannt und für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchte Verallgemeinerung erweitert.

## 2.1 Bezeichnungen

Die folgende Zusammenstellung enthält alle wichtigen, in mehr als einem Abschnitt verwendeten Abkürzungen. Zunächst folgen die Bezeichnungen, die so allgemeiner Natur sind, dass es keinen Sinn hat, sie einem Kapitel zuzuordnen. Danach folgen die Abkürzungen, geordnet nach dem Kapitel ihres ersten Auftretens. Bezeichnungen von ausschließlich lokalem Charakter werden, um der besseren Übersichtlichkeit willen, nur am Ort ihrer Verwendung definiert.

### Allgemeine Abkürzungen

|                        |  |
|------------------------|--|
| $i, j, k$              | Hoch-Indizes der Verformungszustände   |
| $n_S$                  | Anzahl Querschnittsscheiben  |
| $n_K$                  | Anzahl Querschnittsknoten  |
| $n_Z$                  | Anzahl der Grundzustände   |
| $n_{Zellen}$           | Anzahl der geschlossenen Zellen eines Querschnitts   |
| $n_{EQ}$               | Bei zerfallenden Querschnitten die Anzahl der Einzelquerschnitte   |
| $x, y, z$              | globale Koordinaten, $x$ ist die Erzeugende  |
| $u, v, w$              | Verschiebungen in Richtung der globalen Koordinaten  |
| $x, \bar{s}, s$        | lokale Koordinaten im Querschnitt  |
| $u, f(\bar{f}_s), f_s$ | Verschiebungen in Richtung der lokalen Koordinaten   |
| $\varphi, \vartheta$   | Verdrehung der Knotenlinien bzw. der Querschnittsscheiben um die Erzeugende $x$ -Achse                           |
| $\alpha$               | Neigung der (Querschnitts-) Scheibe gegenüber der $y$ -Achse mit gleichem Drehsinn wie $\varphi$ und $\vartheta$ |
| $( )_b$                | Index für Beginn (Anfangsknoten) einer Scheibe   |
| $( )_e$                | Index für Ende (Endknoten) einer Scheibe   |
| $\boxed{r}$            | Knotenbezeichnung  |
| $\textcircled{s}$      | Scheibenbezeichnung  |
| $( )'$                 | $d/dx$   |
| $( )\cdot$             | $d/ds$   |

## 2 Überblick über die VTB

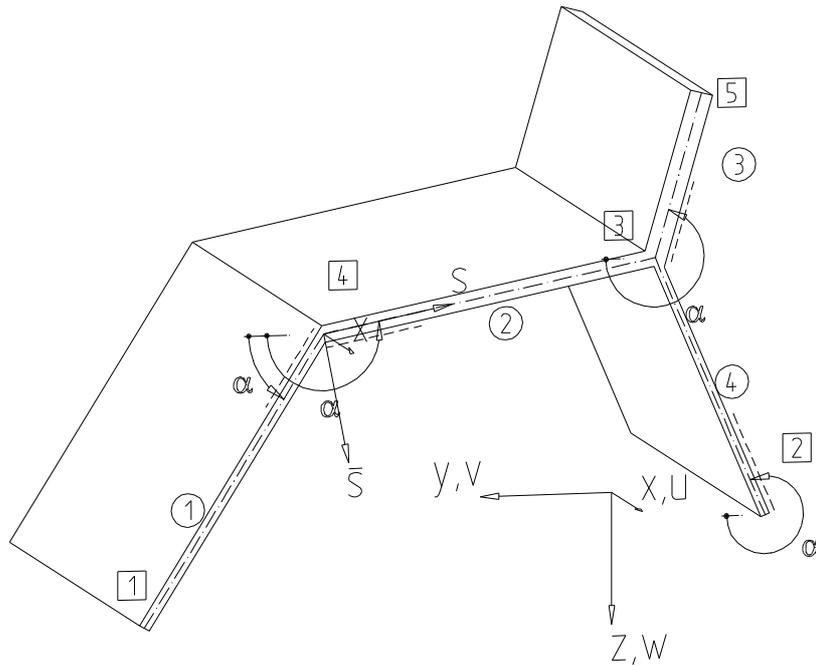


Abbildung 2.1: Lokale und globale Koordinaten am Querschnittssegment

|                 |   |
|-----------------|---|
| $( )^F$         | Federanteil bei Querschnittslagerung  |
| $( )^M$         | Membran- bzw. Scheibenanteil  |
| $( )^B$         | Biege- bzw. Plattenanteil   |
|                 | Die Indizes $( )^M$ bzw. $( )^B$ können entfallen, wenn die Zuordnung eindeutig ist.              |
| $\xi$           | Dimensionslose Koordinate über den Integrationsweg $\xi = \frac{x}{l}$ bzw. $\xi = \frac{x}{l/2}$ |
| $\eta$          | Dimensionslose Koordinate über die Scheibe(n) $\eta = \frac{s}{b}$                                |
| ${}^kV$         | Betonungsfunktion der Verformung  |
| $\underline{V}$ | Vektor der Betonungsfunktionen $(V, V', V'')$   |
| $E$             | Elastizitätsmodul   |
| $G$             | Schubmodul  |
| $\mu$           | Querdehnungszahl  |
| $N^M$           | Scheibensteifigkeit   |
| $N^B$           | Plattensteifigkeit  |

## Kapitel 3

|             |  |
|-------------|--|
| $\bar{u}$   | Konstanter Verwölbungsanteil einer Scheibe $0,5(u_e + u_b)$                |
| $\hat{u}$   | Linearer Verwölbungsanteil einer Scheibe $0,5(u_e - u_b)$                  |
| $\bar{f}_s$ | Konstanter Längsverschiebungsanteil einer Scheibe $0,5(f_{s,e} + f_{s,b})$ |
| $\hat{f}_s$ | Linearer Längsverschiebungsanteil einer Scheibe $0,5(f_{s,e} - f_{s,b})$   |

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $u(s, x)$                   | Verwölbungsfunktion, eigentlich $u(\eta(s), x)$  |
| $f_s(s, x)$                 | Verschiebungsfunktion der Scheibenmittellinie in $s$ -Richtung, eigentlich $f_s(\eta(s), x)$                   |
| $f_{s,0}(s)$                | Anteil der Verschiebungsfunktion zu $V$  |
| $f_{s,2}(s)$                | Anteil der Verschiebungsfunktion zu $V''$  |
| $\varepsilon_x^M$           | Membrandehnungen in $x$ -Richtung  |
| $\varepsilon_s^M$           | Membrandehnungen in $s$ -Richtung  |
| $\gamma_{xs}^M$             | Membrangleitungen in $x$ - $s$ -Ebene  |
| $\underline{\varepsilon}^M$ | Dehnungsvektor $(\varepsilon_x^M, \varepsilon_s^M, \gamma_{xs}^M)$   |
| $\sigma_x^M$                | Membranspannungen in $x$ -Richtung   |
| $\sigma_s^M$                | Membranspannungen in $s$ -Richtung   |
| $\tau_{xs}^M$               | Membranschubspannungen in $x$ - $s$ -Ebene   |
| $\underline{\sigma}^M$      | Spannungsvektor $(\sigma_x^M, \sigma_s^M, \tau_{xs}^M)$  |
| $\underline{V}$             | Verformungsvektor bestehend aus den Verformungen und den Ableitungen $(\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}'')$ |

#### Kapitel 4

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| $\bar{\varphi}$             | Antimetrischer Knotenverdrehungsanteil einer Platte 0,5 $(\varphi_e + \varphi_b)$                   |
| $\hat{\varphi}$             | Symmetrischer Knotenverdrehungsanteil einer Platte 0,5 $(\varphi_e - \varphi_b)$                    |
| $\bar{f}$                   | Konstanter Querverschiebungsanteil einer Platte 0,5 $(f_e + f_b)$                                   |
| $\hat{f}$                   | Linearer Querverschiebungsanteil einer Platte 0,5 $(f_e - f_b)$                                     |
| $f(s, x)$                   | Querverschiebungsfunktion der Plattenmittellinie in $\bar{s}$ -Richtung, eigentlich $f(\eta(s), x)$ |
| $\varepsilon_x^B$           | Biegedehnungen in $x$ -Richtung   |
| $\varepsilon_s^B$           | Biegedehnungen in $s$ -Richtung   |
| $\gamma_{xs}^B$             | Biegegleitungen in $x$ - $s$ -Ebene   |
| $\underline{\varepsilon}^B$ | Dehnungsvektor $(\varepsilon_x^B, \varepsilon_s^B, \gamma_{xs}^B)$                                  |
| $\sigma_x^B$                | Biegespannungen in $x$ -Richtung  |
| $\sigma_s^B$                | Biegespannungen in $s$ -Richtung  |
| $\tau_{xs}^B$               | Biegeschubspannungen in $x$ - $s$ -Ebene  |
| $\underline{\sigma}^B$      | Spannungsvektor $(\sigma_x^B, \sigma_s^B, \tau_{xs}^B)$   |

#### Kapitel 5

|                            |   |
|----------------------------|---|
| $T_{s,r}$                  | Elastischer Anteil zum Scheibenschubfluss der Scheibe $\textcircled{S}$ am Knoten $\boxed{r}$ |
| $(\ )_\mu$                 | Index für die Verschiebungszustände   |
| $(\ )_\varphi$             | Index für die Knotenverdrehungszustände   |
| $\alpha_{r,n}$             | Neigung des Pendelstabes $n$ am Knoten $\boxed{r}$  |
| ${}^k C$                   | Wölbwiderstand  |
| ${}^{kj} D$                | Gesamt-Drillwiderstand  |
| ${}^{kj} D_1, {}^{kj} D_2$ | Drillwiderstandsanteile   |

## 2 Überblick über die VTB

|          |  |
|----------|--|
| ${}^k B$ | Querbiegegewiderstand                                |
| ${}^k W$ | Resultante der Längsspannungen                       |
| ${}^k S$ | Resultante der Vertikalkraft                         |
| $K$      | Matrix der Abtriebskräfte – hier aus Längsdruckkraft |
| $S_k$    | Scheibenschubkraft                                   |

### Kapitel 6

|                          |  |
|--------------------------|--|
| ${}^{kj} K_{\sigma,x}$   | Abtriebsterme aus Spannungen in $x$ -Richtung, erzeugt aus gleichgerichteten Dehnungen |
| ${}^{kj} K_{\sigma,s}$   | Abtriebsterme aus Spannungen in $x$ -Richtung, erzeugt aus Dehnungen in $s$ -Richtung  |
| ${}^{kj} K_{\sigma_s,s}$ | Abtriebsterme aus Spannungen in $s$ -Richtung, erzeugt aus gleichgerichteten Dehnungen |
| ${}^{kj} K_{\sigma_s,x}$ | Abtriebsterme aus Spannungen in $s$ -Richtung, erzeugt aus Dehnungen in $x$ -Richtung  |
| ${}^{kj} K_{\tau,e}$     | Abtriebsterme aus elastischen Schubspannungsanteilen                                   |
| ${}^{kj} K_{\tau,g}$     | Abtriebsterme aus Gleichgewichtsschubspannungen  |

### Kapitel 7

|                |  |
|----------------|--|
| $f(\xi)$       | Lösungsfunktion für den Reihenansatz                     |
| $\Xi$          | Unbekanntenvektor $(1, \xi, \xi^2, \xi^3, \dots, \xi^n)$ |
| ${}^k V_h$     | Homogene Lösungsfunktionen im Zustand $k$                |
| $V_h$          | Vektor der homogenen Lösungsfunktionen                   |
| $V_A$          | Vektor der Approximationen der Verformungsfunktionen     |
| $W_A$          | Vektor der Approximationen der Schnittgrößenverläufe     |
| $a_{ij}$       | Polynomkoeffizienten                                     |
| $\mathbf{a}_j$ | Spaltenvektor der Polynomkoeffizienten                   |
| $\Delta^2$     | Fehlerquadrat zwischen Lösungsfunktion und Approximation |
| $b_{ij}$       | Polynomkoeffizienten der Approximation                   |
| $\mathbf{b}_j$ | Spaltenvektor der Polynomkoeffizienten der Approximation |
| ${}^k q$       | Zustands-Streckenlast                                    |

### Kapitel 8

|                |   |
|----------------|---|
| ${}^k W^*$     | Verallgemeinertes Moment                                    |
| ${}^k S^*$     | Verallgemeinerte Vertikalkraft                              |
| $\mathbf{k}$   | Vektor der Stabendschnittgrößen                             |
| $\mathbf{v}$   | Vektor der Stabendverformungen                              |
| $\mathbf{K}$   | Stabsteifigkeitsmatrix, $\mathbf{k} = \mathbf{K}\mathbf{v}$ |
| $\mathbf{k}_0$ | Vektor der Starreinspannschnittgrößen                       |
| $\mathbf{k}_z$ | Vektor der Zwangskraftgrößen aus Einheitsverformungen       |

|                          |  |
|--------------------------|--|
| $\mathbf{v}_g$           | Vektor der unbekanntenen Weggrößen                                   |
| $\mathbf{K}_g$           | Gesamtsteifigkeitsmatrix, $\mathbf{k}_z = \mathbf{K}_g \mathbf{v}_g$ |
| $\mathbf{k}_{z,0}$       | Vektor der Zwangskraftgrößen aus Lasten                              |
| $q_{y,r}, q_{z,r}$       | Streckenlasten auf Knotenlinie $\boxed{r}$                           |
| $P_{y,r}, P_{z,r}$       | Einzellast in der Querschnittsebene am Knoten $\boxed{r}$            |
| $P_{x,r}$                | Einzellast in Stablängsrichtung am Knoten $\boxed{r}$                |
| ${}^k P$                 | Zustands-Einzellast  |
| ${}^k W_E$               | Zustands-Lastwölbmoment  |
| $m_{ss}, m_{xx}, m_{sx}$ | Plattenmomente   |

## 2.2 Voraussetzungen

Die VTB – Theorie 1. Ordnung – basiert nach [30] auf den folgenden Voraussetzungen:

1. Prismatischer Stab
2. Unverzweigter offener oder geschlossener Querschnitt
3. Gültigkeit der linearisierten Geometrie
4. Innerhalb des Querschnitts linearer Verlauf der Membranlängsspannungen  $\sigma_x^M$  zwischen den Knoten
5. Vernachlässigbarkeit der Membranschubverzerrungen  $\gamma^M$
6. Vernachlässigbarkeit der Membrandehnungen  $\varepsilon_s^M$
7. Homogener und isotroper Werkstoff
8. Unbegrenzt linear elastisches Verhalten

Von diesen Voraussetzungen entfällt im Rahmen meiner Arbeit der Punkt 2. Es können beliebig verzweigte Querschnitte mit beliebiger Anzahl von Zellen berechnet werden. Jede dieser Zellen erhält einen eigenen Bredt'schen Schubfreiheitsgrad.

Die Punkte 4-6 werden in Abhängigkeit von den gewählten Verformungsfreiheitsgraden fallen gelassen. So entfällt durch die Wahl der Scheibenschubverformung der Punkt 5, und werden auch Membranjungdehnungen zugelassen, so entfällt Punkt 6.

## 2 Überblick über die VTB

# 3 Das Scheibenproblem

In der Technischen Biegetheorie werden üblicherweise die Lasten auf die Schwerlinie oder, wenn auch die Verdrehung berücksichtigt wird, auf den Schubmittelpunkt bezogen. Beim Kipp-Problem wird eine weitere Aussage über den Lastangriffspunkt notwendig, um den Zusatzterm für die Theorie 2. Ordnung zu ermitteln. Ansonsten wird der Angriffspunkt der Last üblicherweise nicht weiter verfolgt.

Die Verallgemeinerte Technische Biegetheorie geht einen Schritt weiter. Zwar werden die aus der Last resultierenden Profilverformungen berücksichtigt, jedoch unterblieb bislang die Behandlung des Einflusses auf die Stabilität aufgrund zu komplizierter Formulierungen. Eine einfache, systematische Beschreibung der Umfangsspannungen ist ohne ihre Arbeitskomplemente bislang nicht abzusehen. Siehe hierzu auch Heinz und Mark [16].

Ist der Einfluss des Angriffspunktes ohne große Auswirkungen, so kann man ihn als eine Randstörung von begrenztem Ausmaß ansehen. Unter dieser Voraussetzung ist es auch vollkommen ausreichend, nur den einachsigen Spannungszustand  $\sigma_x^M$ ,  $\sigma_s^M = 0$  zu betrachten. Will man seine Wirkung auf die Spannungsverteilung genauer untersuchen oder sollen – eines Tages – unterschiedliche Querschnitte miteinander verbunden werden, ist es erforderlich, die Membranjungspannungen  $\sigma_s^M$  und die zugehörigen Dehnungen  $\varepsilon_s^M$  zu berücksichtigen.

## 3.1 Die Auswahl der Spannungs- und Verformungsansätze

Bevor auf die Darstellung der ausgewählten Verformungsansätze eingegangen wird, erfolgt eine kurze Betrachtung der Arbeiten von Möller [23] und Girmscheid [9]. Möller hat einen über die Scheibe konstanten Schubverformungsfreiheitsgrad eingeführt. Girmscheid hat dazu Umfangsdehnungen derart eingeführt, dass die Verwölbung der Scheibe verhindert wird und die beiden begrenzenden Knotenlinien in Scheibenlängsrichtung verschoben werden. Daraus ergibt sich eine zusätzliche, linear über die Scheibenbreite verlaufende Schubverzerrung.

Hier wird nun der Ansatz so gewählt, dass sich die Erweiterung der VTB um weitere Verformungsansätze – sieht man von dem Sonderfall des Querschnitts mit einer Hauptscheibe ab – in das bestehende System aus Wölb- und Plattenfreiheitsgraden möglichst nahtlos einpasst. Dabei liegt auch das Augenmerk auf den zur Verfügung stehenden Lösungsverfahren, die auf einem Differentialgleichungssystem 4. Ordnung basieren.

Aus den genannten Gründen sollen nunmehr die elastischen Umfangsspannungen ebenso wie die elastischen Membranschubspannungen nach [23] die Mittelwerte über die Scheiben repräsentieren. Es gilt:

$$\sigma_{s,el}(s) = \text{const.} \tag{3.1}$$

### 3 Das Scheibenproblem

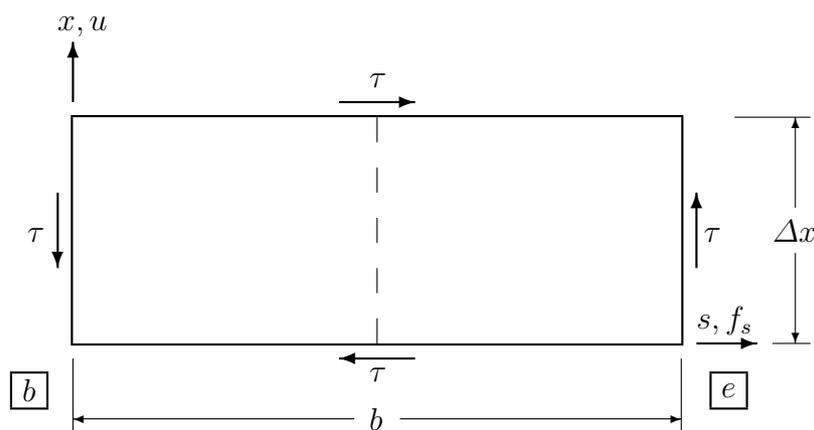


Abbildung 3.1: Scheibenelement der Breite  $b$  und der Länge  $\Delta x$

$$\tau_{xs,el}(s) = \text{const.} \quad (3.2)$$

Sind die Mittelwerte bekannt, so lassen sich die Spannungsverläufe über elementare Gleichgewichtsbedingungen ermitteln; darauf wird an späterer Stelle in Kapitel 5.6.1 eingegangen. Für die Beschreibung der Verformungs- und Spannungsverläufe wird das in Abbildung 3.1 dargestellte, lokale Koordinatensystem verwendet. Die vier Verformungsansätze, die den zuvor genannten Voraussetzungen genügen, sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Vor

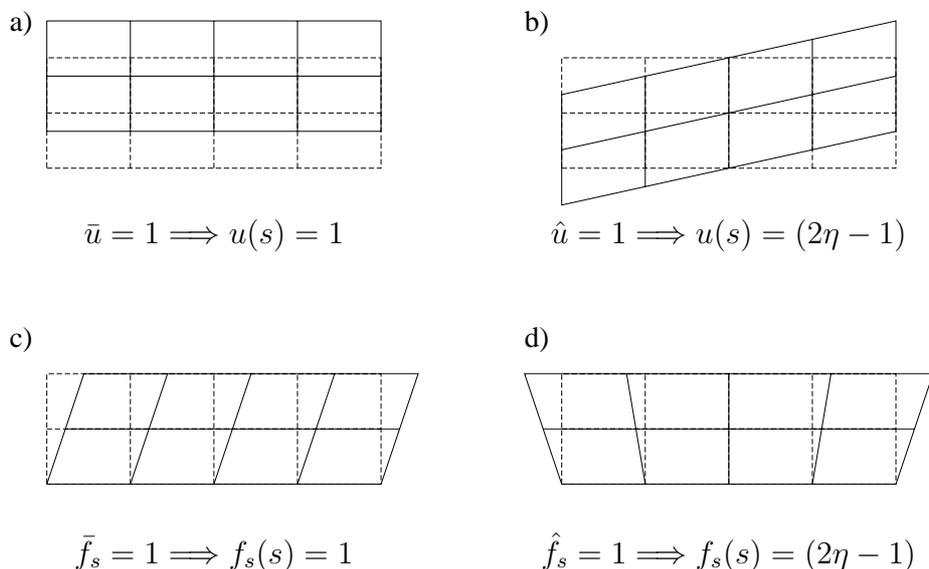


Abbildung 3.2: Die gewählten Scheibenverformungsansätze mit  $V' = \text{const.}$

der Darstellung der Funktionsverläufe werden noch die symmetrischen und antisymmetrischen Verformungsanteile definiert

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (u_e + u_b)/2 \\ \hat{u} &= (u_e - u_b)/2 \end{aligned}$$

### 3.2 Die Dehnungen und Spannungen der Scheibenverformungsansätze

$$\begin{aligned}\bar{f}_s &= (f_{s,e} + f_{s,b})/2 \\ \hat{f}_s &= (f_{s,e} - f_{s,b})/2\end{aligned}\quad (3.3)$$

und mit der dimensionslosen Koordinate über die Scheibenbreite

$$\eta = \frac{s}{b} \quad (3.4)$$

werden dann die Verformungsverläufe wie folgt beschrieben:

$$u(s, x) = u(s) \cdot V'(x) \quad (3.5)$$

$$= (\bar{u} + (2\eta - 1)\hat{u}) V'(x) \quad (3.6)$$

$$f_s(s, x) = f_{s,0}(s) \cdot V(x) + f_{s,2}(s) \cdot V''(x) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}&= (\bar{f}_s + (2\eta - 1)\hat{f}_s) V(x) \\ &- \mu b (\eta^2 - \eta) \hat{u} \cdot V''(x).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Die Terme mit der zweiten Ableitung können als Korrekturen an den Verformungsansätzen aufgefasst werden, die sich aus der Forderung nach einem konstanten Umfangsspannungsverlauf ergeben.

## 3.2 Die Dehnungen und Spannungen der Scheibenverformungsansätze

Nachdem die Verformungsansätze definiert sind, lassen sich nach Anwendung der bekannten Differentiationsregeln die Dehnungen anschreiben. Dabei werden die Koeffizienten zu  $V'''$  vernachlässigt, da sie von höherer Größenordnung klein sind und zudem die störende Eigenschaft haben, zu einem Differentialgleichungssystem 6. Ordnung zu führen.

$$\underline{\underline{\epsilon}}^M = \begin{pmatrix} \epsilon_x^M \\ \epsilon_s^M \\ \gamma_{xs}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u(s) \\ \dot{f}_{s,0}(s) & 0 & \dot{f}_{s,2}(s) \\ 0 & \dot{u}(s) + f_{s,0}(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ V' \\ V'' \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{u} + (2\eta - 1)\hat{u} \\ \frac{2}{b}\hat{f}_s & 0 & -\mu(2\eta - 1)\hat{u} \\ 0 & \frac{2}{b}\hat{u} + \bar{f}_s + (2\eta - 1)\hat{f}_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ V' \\ V'' \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Aus den Dehnungen berechnen sich die Spannungen zu:

$$\underline{\underline{\sigma}}^M = \begin{pmatrix} \sigma_x^M \\ \sigma_s^M \\ \gamma_{xs}^M \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \mathbf{J} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^M = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \underline{\underline{\epsilon}}^M \quad (3.12)$$

### 3 Das Scheibenproblem

$$= \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} \mu \dot{f}_{s,0}(s) & 0 & u(s) + \mu \dot{f}_{s,2}(s) \\ \dot{f}_{s,0}(s) & 0 & \mu u(s) + \dot{f}_{s,2}(s) \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} (\dot{u}(s) + f_{s,0}(s)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ V' \\ V'' \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$= \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{b} \hat{f}_s & 0 & \bar{u} + (2\eta-1) \hat{u} \\ \frac{2}{b} \hat{f}_s & 0 & -\mu^2 (2\eta-1) \hat{u} \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{2}{b} \hat{u} + \bar{f}_s + (2\eta-1) \hat{f}_s \right) & \mu \cdot \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ V' \\ V'' \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Die hier dargestellten Schub- und Umfangsspannungen repräsentieren nur die Mittelwerte. Die Berechnung der Verläufe erfolgt in Kapitel 5.6 unter Berücksichtigung verschiedener Verformungsfreiheitsgrade.

Bevor es mit den inneren Arbeiten weitergeht, soll überprüft werden, ob die gewählten Ansatzfunktionen die Verträglichkeitsbedingung der Scheibendifferentialgleichung erfüllt. Diese lautet:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xs}^M}{\partial x \partial s} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x^M}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_s^M}{\partial x^2}. \quad (3.15)$$

Mit der Gleitung, diesmal ohne Vernachlässigung der Anteile zu  $V'''$

$$\gamma_{xs}^M = \left( \frac{2}{b} \hat{u} + \bar{f}_s + (2\eta-1) \hat{f}_s \right) \cdot V' - \mu b (\eta^2 - \eta) \bar{u} \cdot V''' \quad (3.16)$$

und den Dehnungen  $\varepsilon_x^M$  und  $\varepsilon_s^M$  aus Gleichung (3.10) erhält man:

$$\ddot{\varepsilon}_x = 0 \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_s'' = \frac{2}{b} \hat{u}_s \cdot V'' - \mu (2\eta-1) \hat{u} \cdot V'''' \quad (3.18)$$

$$\dot{\gamma}'_{xs} = \frac{2}{b} \hat{u}_s \cdot V'' - \mu (2\eta-1) \hat{u} \cdot V'''' \quad (3.19)$$

womit die Verträglichkeit nachgewiesen ist.

## 3.3 Die Ermittlung der inneren Arbeiten

Als nächstes werden die inneren Arbeiten ermittelt, die entstehen, wenn der Spannungszustand  ${}^jV$  an einem Dehnungszustand  ${}^kV$  Arbeit leistet. Die Arbeiten berechnen sich aus dem Volumenintegral über das Produkt Spannungen mal Dehnungen. Aus

$${}^{kj} \mathcal{W}^M = \frac{1}{2} \int_V k_{\underline{\varepsilon}}^{MT} j_{\underline{\sigma}}^M dV \quad (3.20)$$

wird bei konstanter Scheibendicke mit den Gleichungen (3.9) und (3.12)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot t \int_0^l \int_s \ k_{\underline{\varepsilon}}^{MT} j_{\underline{\sigma}}^M \ ds \ dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{Et}{1-\mu^2} \int_0^l \int_s \ k_{\underline{\varepsilon}}^{MT} \mathbf{J} j_{\underline{\varepsilon}}^M \ ds \ dx, \end{aligned}$$

unter Verwendung der Scheibensteifigkeit  $N^M = \frac{Et}{1-\mu^2}$

$$= \frac{1}{2} \cdot N^M \int_0^l {}^k \underline{\mathbf{V}}^T \int_s {}^k \underline{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^M T \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} {}^j \underline{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^M ds {}^j \underline{\mathbf{V}} dx \quad (3.21)$$

und nach Integration über  $s$  mit Einführung der Abkürzungen  $c^M$ ,  $d_1^M$ ,  $d_2^M$  und  $b^M$  (siehe Kapitel 9.1.1)

$$= \frac{1}{2} \int_0^l {}^k \underline{\mathbf{V}}^T \begin{pmatrix} {}^{kj} b^M & 0 & -G^{jk} d_2^M \\ 0 & G^{kj} d_1^M & 0 \\ -G^{kj} d_2^M & 0 & E^{kj} c^M \end{pmatrix} {}^j \underline{\mathbf{V}} dx \quad (3.22)$$

Bilden der Variationsableitung führt zu

$$\delta^{kj} \mathcal{W}^M = \int_0^l \delta^k \underline{\mathbf{V}}^T \begin{pmatrix} {}^{kj} b^M & 0 & -G^{jk} d_2^M \\ 0 & G^{kj} d_1^M & 0 \\ -G^{kj} d_2^M & 0 & E^{kj} c^M \end{pmatrix} {}^j \underline{\mathbf{V}} dx \quad (3.23)$$

und die partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \delta^{kj} \mathcal{W}^M &= \int_0^l \left( E^{kj} c^M {}^j V'''' - G \left( {}^{jk} d_2^M + {}^{kj} d_1^M + {}^{kj} d_2^M \right) {}^j V'' + {}^{kj} b^M {}^j V \right) \delta^k V dx \\ &\quad - \left( E^{kj} c^M {}^j V'''' - G \left( {}^{kj} d_1^M + {}^{kj} d_2^M \right) {}^j V' \right) \delta^k V \Big|_0^l \\ &\quad + \left( E^{kj} c^M {}^j V'' - G^{kj} d_2^M {}^j V \right) \delta^k V' \Big|_0^l \end{aligned} \quad (3.24)$$

An den im Integral stehenden Ausdrücken kann man bereits die aus der Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie bekannten Koeffizienten der Differentialgleichung erkennen. Hierbei handelt es sich allerdings ausschließlich um die Membrananteile.

### *3 Das Scheibenproblem*

## 4 Das Plattenproblem

In diesem Kapitel wollen wir uns mit den Ansätzen für die Plattenanteile befassen. In [30] wird der Verlauf der Querbiegemomente, genau genommen nur deren Anteil aus der Querkrümmung  $\dot{f}$ , und der Plattenverformungen von der Sehne aus über die aus den Einheitsverwölbungen entstehenden Kontingenzwinkel benachbarter Scheiben mittels einer statisch unbestimmten Rechnung ermittelt. In [22] ist die Vorgehensweise prinzipiell dieselbe, wobei die daraus resultierenden „Plattenzustände“ noch nicht in die allgemeine Orthogonalisierung eingegangen sind. Mit dem linearen Verlauf der Querbiegemomente ist die Verformung der Platte in Querrichtung als Parabel dritter Ordnung bekannt. Bei abgewickelten faltwerken, und wenn die Belastungen nur auf die Knotenlinien aufgebracht werden ist diese Vorgehensweise ausreichend. Sollen jedoch Flächenlasten zugelassen oder die Randbedingungen der Plattenanteile genauer eingehalten werden, ist es notwendig, zusätzlich auch noch die Verdrehungen der Knotenlinien um die Stabachse einzuführen. Aus diesem Grund werden nachfolgend die Verformungsansätze für die Plattenanteile über die „Knotendrehwinkel“ hergeleitet.

Bezeichnen wir, wie in Abbildung 4 dargestellt mit  $f$  die Verschiebung quer zur Plattenebene, so soll auch hier ein Produktansatz der Form

$$f(x, s) = f(s) \cdot V(x) \quad (4.1)$$

zur Anwendung kommen.

### 4.1 Der Ansatz für die Funktion $f(s)$

Die zur Beschreibung einer kubischen Parabel notwendigen 4 Koeffizienten lassen sich am einfachsten durch die Verschiebungen  $f_b$  und  $f_e$  sowie den Knotenverdrehungen  $\dot{f}_b = -\varphi_b$  und  $\dot{f}_e = -\varphi_e$  ausdrücken. Statt der Verdrehungen könnten auch die Querbiegemomente herangezogen werden. Da, wie in Kapitel 5 noch gezeigt wird, auch beliebig verzweigte Querschnitte behandelt werden, ist die Darstellung mit den Knotendrehwinkeln, die auch in [23] verwendet wurde, übersichtlicher.

Die Kontinuitätsbedingung verlangt, dass die Verformungen bei den aneinandergrenzenden Scheiben übereinstimmen. Dies ist bei der Weggrößenformulierung immer der Fall.

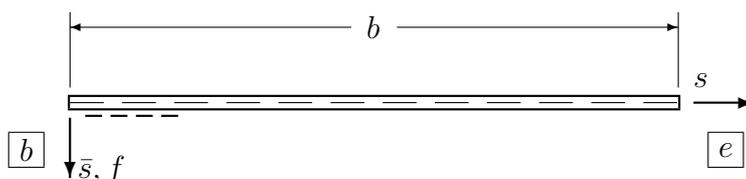


Abbildung 4.1: Plattenelement der Breite  $b$  und der Dicke  $t$ .

#### 4 Das Plattenproblem

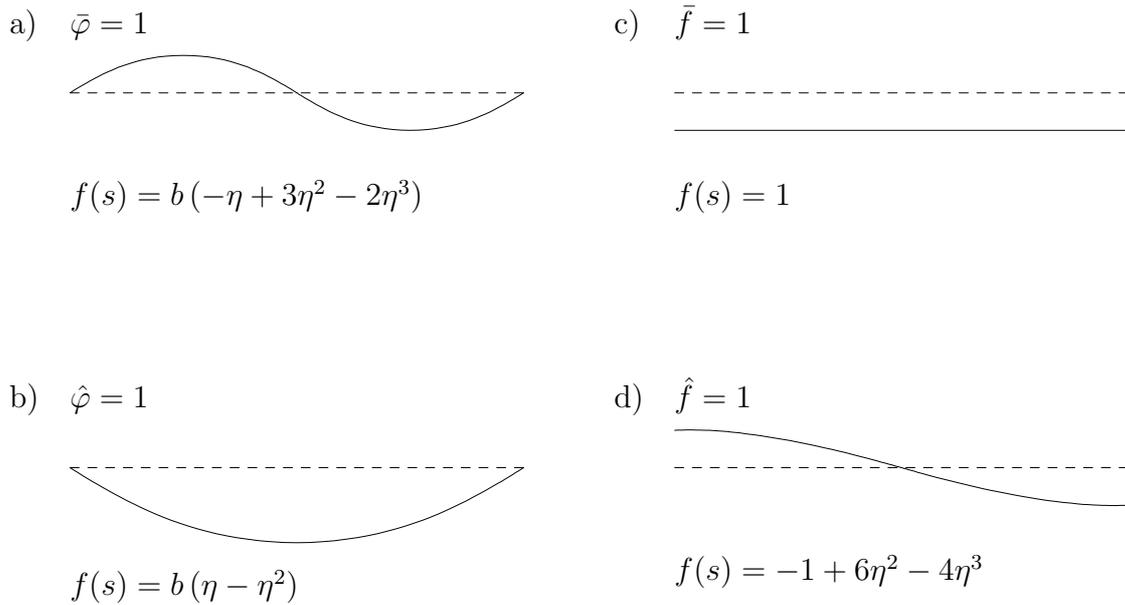


Abbildung 4.2: Die gewählten Plattenverformungsansätze mit  $V = const.$

Auch die Beschreibung von Lagerungen wird wesentlich einfacher, und zusätzlich bietet sich die Möglichkeit, diese Weggrößen als unabhängige Freiheitsgrade zu betrachten. Die Verformungsfunktionen  $f(s)$  in Abhängigkeit von den Knotenweggrößen sind aus der Literatur für das Stabproblem bekannt.

Auch hier sollen die Verformungsgrößen zu symmetrischen und antisymmetrischen Anteilen zusammengefasst werden. Die Verformungsansätze sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi} &= (\varphi_e + \varphi_b)/2 \\
 \hat{\varphi} &= (\varphi_e - \varphi_b)/2 \\
 \bar{f} &= (f_e + f_b)/2 \\
 \hat{f} &= (f_e - f_b)/2
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Anschaulicher als die Bezeichnung  $\hat{f}$  ist die Scheibenverdrehung  $\vartheta$ . Sie, wie auch die Knotenverdrehungen, sind dann positiv, wenn sie im positiven Drehsinn um die erzeugende Stabachse wirken. Zwischen  $\hat{f}$  und dem Scheibendrehwinkel besteht die Beziehung

$$\vartheta = -\frac{2}{b} \cdot \hat{f}. \tag{4.3}$$

Benutzt man diese Zusammenhänge und setzt sie in die bekannten Formeln für die Stabverformung ein, so bekommt man den nachfolgend dargestellten Ausdruck für die Plattenverformung und ihre ersten beiden Ableitungen, wiederum unter Verwendung der dimensionslosen Koordinate  $\eta = \frac{s}{b}$

$$\begin{aligned}
 f(s) &= \frac{(2b^2s - 2bs^2)\hat{\varphi} + (-2b^2s + 6bs^2 - 4s^3)\bar{\varphi} + 2b^2\bar{f} + (b^3 - 6bs^2 + 4s^3)\vartheta}{2b^2} \\
 f(s) &= \bar{f} + (-1 + 6\eta^2 - 4\eta^3)\hat{f} + b(-\eta + 3\eta^2 - 2\eta^3)\bar{\varphi} + b(\eta - \eta^2)\hat{\varphi}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\dot{f}(s) = \frac{12}{b} (\eta - \eta^2) \hat{f} + (-1 + 6\eta - 6\eta^2) \bar{\varphi} + (1 - 2\eta) \hat{\varphi} \quad (4.5)$$

$$\ddot{f}(s) = \frac{12}{b^2} (1 - 2\eta) \hat{f} + \frac{6}{b} (1 - 2\eta) \bar{\varphi} - \frac{2}{b} \hat{\varphi} \quad (4.6)$$

## 4.2 Die Dehnungen und Spannungen des Plattenproblems

Aus der Funktion für die Durchbiegung lassen sich durch Differentiation die Krümmungen der Platte ermitteln. Sie sind durch die nachfolgende Beziehung, gleich für den Produktansatz, gegeben.

$$\underline{\kappa}^B = \begin{pmatrix} \kappa_x^B \\ \kappa_s^B \\ \kappa_{xs}^B \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{d^2 f(x,s)}{dx^2} \\ \frac{d^2 f(x,s)}{ds^2} \\ 2 \frac{d^2 f(x,s)}{ds dx} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Setzen wir jetzt noch die Funktion  $f(s)$  und ihre Ableitungen ein, so erhalten wir

$$\underline{\kappa}^B = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & f(s) \\ \ddot{f}(s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\dot{f}(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V \\ V' \\ V'' \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$= -\tilde{\underline{\kappa}}^B \cdot \underline{\mathbf{V}}(x). \quad (4.9)$$

Die zugehörigen Dehnungen berechnen sich aus der Bedingung

$$\underline{\varepsilon}^B = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^B \\ \varepsilon_s^B \\ \gamma^B \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{s}} \cdot \underline{\kappa}^B \quad (4.10)$$

und die Spannungen ergeben sich über das 2-achsige Spannungsgesetz zu

$$\underline{\sigma}^B = \begin{pmatrix} \sigma_x^B \\ \sigma_s^B \\ \tau_{xs}^B \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$= \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \mathbf{J} \cdot \underline{\varepsilon}^B = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \cdot \underline{\varepsilon}^B \quad (4.12)$$

$$= + \frac{E\bar{\mathbf{s}}}{1 - \mu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \cdot \underline{\kappa}^B \quad (4.13)$$

$$= - \frac{E\bar{\mathbf{s}}}{1 - \mu^2} \cdot \begin{pmatrix} \mu\ddot{f}(s) & 0 & f(s) \\ \ddot{f}(s) & 0 & \mu f(s) \\ 0 & (1 - \mu)\dot{f}(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V \\ V' \\ V'' \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

#### 4 Das Plattenproblem

Die Bezeichnungen für die Spannungen und Dehnungen sind in ihrem Aufbau ganz analog zu denen, die wir aus dem Scheibenproblem erhalten haben. Wir haben hier nun  $\bar{s}$  als zusätzliche Variable zur Beschreibung des linearen Verlaufs der Spannungen und Dehnungen in  $\bar{s}$ -Richtung.

Aus der Integration des Produktes Spannungen mal Abstand über die Scheibendicke  $\int_{-t/2}^{+t/2} \underline{\sigma}^B \bar{s} d\bar{s}$  ergeben sich die Plattenmomente. Mit der Plattensteifigkeit  $N^B = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$  werden sie zu

$$\begin{pmatrix} m_{xx} \\ m_{ss} \\ m_{xs} \end{pmatrix} = -N^B \begin{pmatrix} \mu \ddot{f}(s) & 0 & f(s) \\ \dot{f}(s) & 0 & \mu f(s) \\ 0 & (1-\mu)\dot{f}(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{V}}(x). \quad (4.15)$$

### 4.3 Die Ermittlung der inneren Arbeiten des Plattenproblems

Die Ermittlung der Arbeiten wurde schon vorher ausgiebig behandelt und stellt auch in diesem Zusammenhang nur insoweit eine Erweiterung dar, als zu ihrer Beschreibung die Verdrehung der Knotenlinien statt der Querbiegemomente verwendet werden. Sie werden hier nur der Vollständigkeit halber noch einmal angeschrieben.

Auch hier werden die Arbeiten ermittelt, die entstehen, wenn ein Spannungszustand  ${}^jV$  an einem Dehnungszustand  ${}^kV$  Arbeit leistet.

Das Volumenintegral über das Produkt Spannungen mal Dehnungen ergibt mit den Gleichungen (4.7) bis (4.12):

$${}^{kj}\mathcal{W}^B = \frac{1}{2} \int_V {}^k \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{BT} {}^j \underline{\boldsymbol{\sigma}}^B dV \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \int_s \int_{-t/2}^{+t/2} {}^k \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{BT} {}^j \underline{\boldsymbol{\sigma}}^B d\bar{s} ds dx \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \int_0^l \int_s \int_{-t/2}^{+t/2} \bar{s}^2 {}^k \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{BT} \mathbf{J} {}^j \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^B d\bar{s} ds dx, \quad (4.18)$$

nach Integration über  $\bar{s}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \int_0^l \int_s {}^k \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{BT} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} {}^j \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^B ds dx \quad (4.19)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot N^B \int_0^l {}^k \underline{\mathbf{V}}^T \int_s {}^k \tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{BT} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} {}^j \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^B ds {}^j \underline{\mathbf{V}} dx \quad (4.20)$$

und nach Integration über  $s$  und Einführung der Abkürzungen  $c^B$ ,  $d_1^B$ ,  $d_2^B$  und  $b^B$  (siehe Kapitel 9.1.2)

$$= \frac{1}{2} \int_0^l {}^k \underline{\mathbf{V}}^T \begin{pmatrix} {}^{kj}b^B & 0 & -G {}^{jk}d_2^B \\ 0 & G {}^{kj}d_1^B & 0 \\ -G {}^{kj}d_2^B & 0 & E {}^{kj}c^B \end{pmatrix} {}^j \underline{\mathbf{V}} dx. \quad (4.21)$$

### 4.3 Die Ermittlung der inneren Arbeiten des Plattenproblems

Bilden der Variationsableitung führt zu

$$\delta\mathcal{W} = \int_0^l \delta^k \underline{\mathbf{V}}^T \begin{pmatrix} {}^{kj}b^B & 0 & -G^{jk}d_2^B \\ 0 & G^{kj}d_1^B & 0 \\ -G^{kj}d_2^B & 0 & E^{kj}c^B \end{pmatrix} {}^j \underline{\mathbf{V}} \, dx \quad (4.22)$$

und partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \delta^{kj}\mathcal{W} &= \int_0^l \left( E^{kj}c^B {}^j V'''' - G \left( {}^{jk}d_2^B + {}^{kj}d_1^B + {}^{kj}d_2^B \right) {}^j V'' + {}^{kj}b^B {}^j V \right) \delta^k V \, dx \\ &\quad - \left( E^{kj}c^B {}^j V''' - G \left( {}^{kj}d_1^B + {}^{kj}d_2^B \right) {}^j V' \right) \delta^k V \Big|_0^l \\ &\quad + \left( E^{kj}c^B {}^j V'' - G^{kj}d_2^B {}^j V \right) \delta^k V' \Big|_0^l \end{aligned} \quad (4.23)$$

Diese Variationsgleichung ist, sieht man von den hochgestellten Indizes  $M$  und  $B$  ab, identisch mit der aus Abschnitt 3.3. Die weitere Betrachtung dieser Ausdrücke soll vorerst verschoben werden. Zunächst gilt es, die Berechnung der Querschnittswerte vorzubereiten.

## 4 *Das Plattenproblem*

# 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

Für die Ermittlung der Querschnittswerte war es erforderlich, vollkommen neue Wege zu gehen. Zum einen erwies es sich als zu umständlich, die vorhandenen Standard-Programme mit den bisherigen Freiheitsgraden zu erweitern, zum anderen hätte auf die Behandlung von verzweigten, geschlossenen mehrzelligen und beliebig gelagerten Querschnitten verzichtet werden müssen. Um diesem Problem zu entgehen und um außerdem den Zusammenhang mit den „klassischen Querschnittswerten“ zu wahren, wurde ein – für die Verallgemeinerte Technische Biegetheorie ganz neues – Verfahren gewählt, das allgemein genug ist, um den neuen Anforderungen zu entsprechen, und das zudem noch geeignet ist, den Übergang zu den bisherigen Freiheitsgraden zu liefern. Zusätzlich war es auch noch möglich, einen Algorithmus zu finden, der die Bredt'schen Kreisschubflüsse bei geschlossenen Profilen auf einfache Weise für den Fall findet, dass individuelle Scheibenschubverformungen und Umfangsspannungen nicht berücksichtigt werden sollen.

## 5.1 Die Grundzustände für Querschnitte mit Umfangsdehnungen und Schubverformungen

Versucht man den in den Kapiteln 3 und 4 dargestellten Spannungs- und Verformungsansätzen Freiheitsgrade zuzuordnen, so führt dies zu den nachfolgend aufgelisteten Bezeichnungen, von denen die ersten drei in den Arbeiten von Schardt [28], Miosga [22] sowie Saal [26] und Möller [23] und die vierte bei Girmscheid [9] dargestellt werden. Ebenfalls bei Saal findet man die Behandlung der Knotenverdrehungen als eigenen Freiheitsgrad.

1. Wölbfreiheitsgrade
2. Plattenfreiheitsgrade
3. Scheibenschubverformungen
4. Umfangsdehnungen
5. Knotenverdrehungen

Neu in der VTB ist die hier gewählte Behandlung von Umfangsspannungen bzw. -dehnungen, sowie die fast freie Wahl von Freiheitsgraden.

Werden all diese Freiheitsgrade ausgewählt, so ist die Aufstellung der Grundzustände denkbar einfach. Es werden die 3 globalen Knotenverschiebungen  $u_r = 1$ ,  $v_r = 1$ ,  $w_r = 1$  und die Verdrehung der Knotenlinien  $\varphi_r = 1$  als unabhängige Verformungszustände vorgegeben. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 5.1 ein Zweiseibenquerschnitt dargestellt. Die Verformungsfiguren zeigen die je 3 Knotenverschiebungen in  $y$ -,  $z$ - und  $x$ -Richtung sowie die Verdrehung der 3 Knotenlinien. Die maximale Anzahl an Grund-

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

VAX/VMS QEP V1.05 \*\* Grundzustände \*\*

24.08.1989 Nr.2942

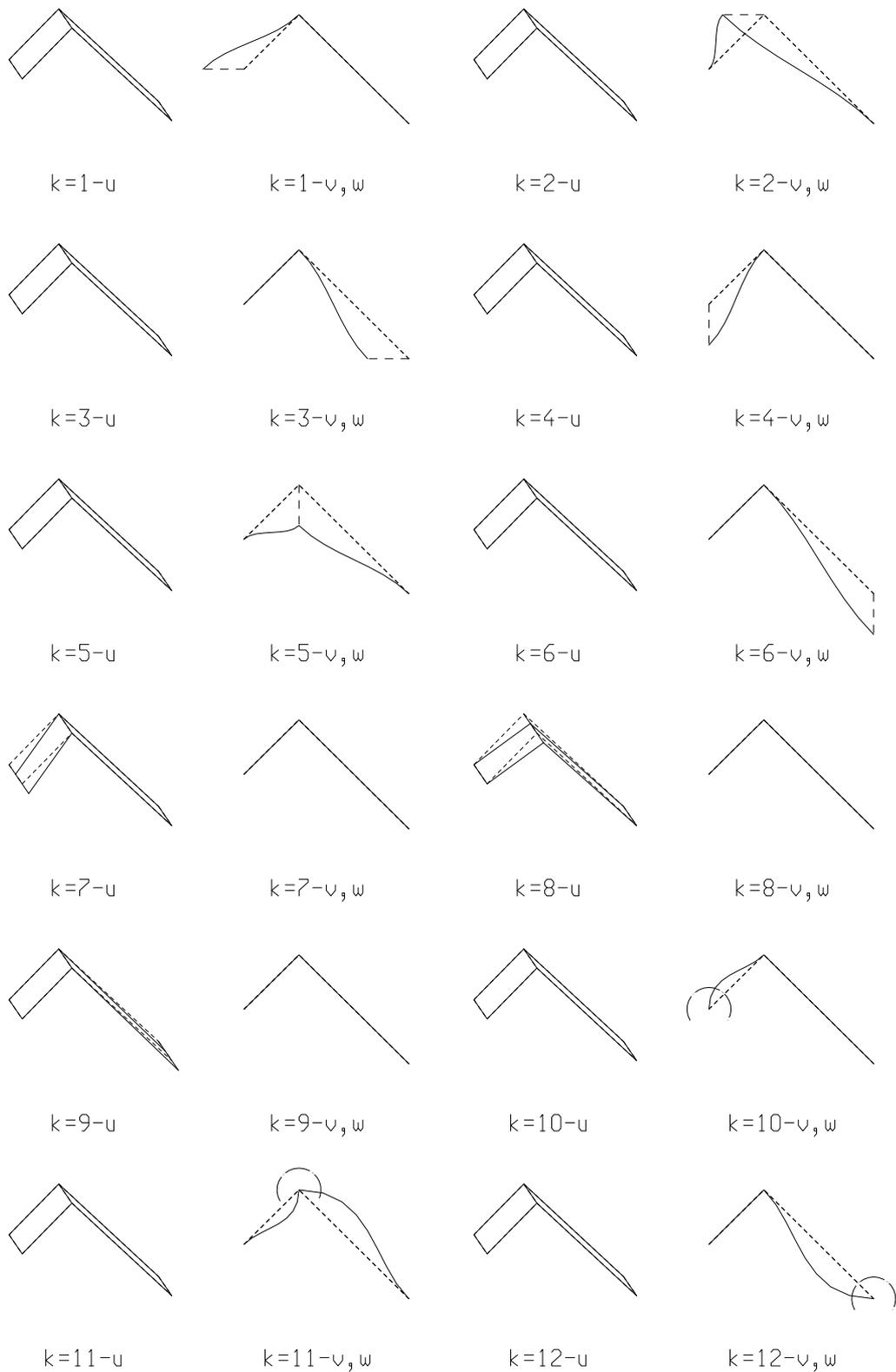


Abbildung 5.1: Die allgemeinen Grundzustände

zuständen beträgt somit  $4 \cdot n_K$ .

Neben diesen unabhängigen Verformungsansätzen gibt es geometrisch abhängige Scheiben- und Knotenweggrößen, die sich aus den Knotenverschiebungen berechnen lassen. Diese sind die Scheibenlängsverschiebung, die mittlere Umfangsdehnung, die Scheibenquerverschiebung, die Scheibenverdrehung und die mittlere Membranschubverformung. Mit nachfolgenden Abkürzungen für die lokalen Knotenverschiebungen in  $s$ - und  $\bar{s}$ -Richtung am Beginn und Ende jeder Scheibe und dem Scheibenneigungswinkel  $\alpha$  (siehe Abbildung 2.1)

$$f_{s,b} = v_b \cdot \cos \alpha + w_b \cdot \sin \alpha \quad (5.1)$$

$$f_{s,e} = v_e \cdot \cos \alpha + w_e \cdot \sin \alpha \quad (5.2)$$

$$f_b = v_b \cdot \sin \alpha + w_b \cdot \cos \alpha \quad (5.3)$$

$$f_e = v_e \cdot \sin \alpha + w_e \cdot \cos \alpha \quad (5.4)$$

lassen sich die abhängigen symmetrischen/antisymmetrischen Verformungen, die für die Berechnung der Arbeitsausdrücke benötigt werden, mittels der Gleichungen (3.3) und (4.2) für jede Querschnittsscheibe errechnen.

## 5.2 Der Ausschluss von Freiheitsgraden

Da die Ermittlung der Querschnittswerte mit Umfangsspannungen eine Erweiterung der bisherigen Theorie bedeutet, muss – trotz der grundsätzlich anderen Vorgehensweise – die bisherige Betrachtung mit den Wölb- und Plattenfreiheitsgraden als Teilmenge erhalten sein. Als erster Hinweis, wie die Rückführung zu bewerkstelligen ist, kann die Einarbeitung der Lagerungsbedingungen angesehen werden. Dort werden, mittels Verträglichkeitsbedingungen, Abhängigkeiten zwischen den aufgestellten Zuständen ermittelt. Die Elimination von Freiheitsgraden wird in analoger Weise durchgeführt; die Verträglichkeitsbedingungen bilden ein homogenes Gleichungssystem, dessen Fundamentalsystem die reduzierte Anzahl Grundzustände liefert.

Für die Ermittlung der Querschnittswerte werden grundsätzlich die Wölb- und Plattenfreiheitsgrade angesetzt, da es wenig sinnvoll ist, diese außer Acht zu lassen. Zusätzlich können Scheibenschubverformungen und Umfangsspannungen ausgewählt werden, wobei die Umfangsspannungen die Schubverformungen voraussetzen; diese Freiheitsgrade können beliebig mit der Verdrehung der Knotenlinien kombiniert werden.

### 5.2.1 Die Elimination der Umfangsdehnungen

In der bisherigen Theorie wurde, abgesehen von [9], stets davon ausgegangen, dass ein einachsiger Membranspannungszustand vorliegt. Die zu dem zweiachsigen Dehnungszustand gehörenden Umfangsverschiebungen wurden vernachlässigt, da zusätzlich zu den zu der Verformungsamplitude  $V$  gehörenden Verschiebungen in der Querschnittsebene auch noch Anteile mit  $V''$  hinzukämen. Auch wäre eine anschauliche Herleitung der Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie allein über die Verwölbung der Hauptknoten nicht mehr möglich. Diese Vernachlässigung entspricht mechanisch einer Querdehnungszahl  $\mu = 0$  bei den Membranverzerrungen und der Annahme, dass die Dehnsteifigkeiten der Scheiben in der Querschnittsebene unendlich groß sind. Unter dieser Voraussetzung kann man

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

VAX/VMS QEP V1.05 \*\* Grundzustände \*\*

24.06.1989 Nr.2943

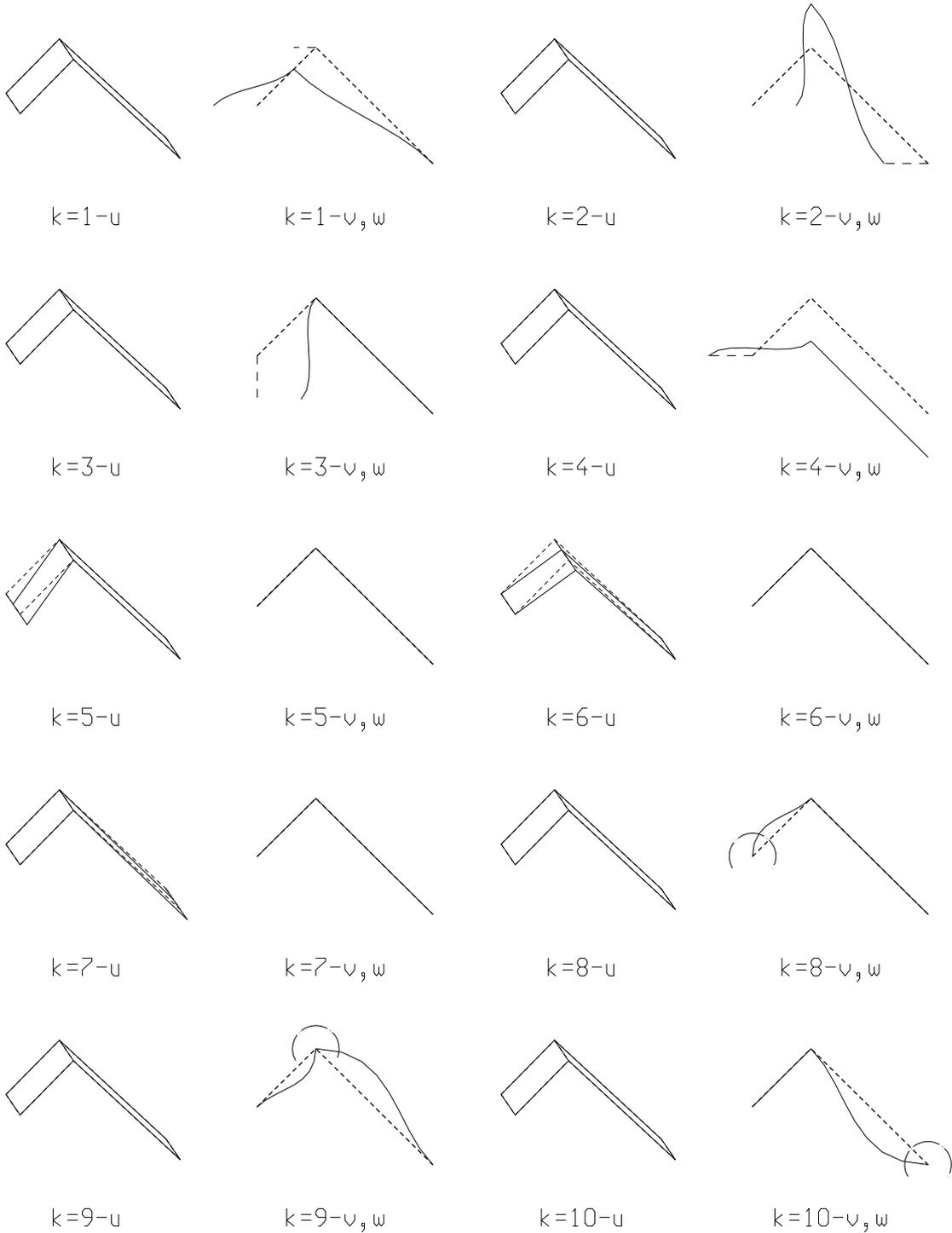


Abbildung 5.2: Die Grundzustände nach Elimination der Umfangsdehnungen

mit der Bedingung

$$\hat{f}_s = 0 \quad (5.5)$$

für jede Querschnittsscheibe unter Beachtung des einachsigen Spannungsgesetzes und den vorausgegangen Voraussetzungen die Umfangsdehnungen eliminieren. Die Anzahl der unabhängigen Zustände verringert sich dadurch um die Anzahl der vorhandenen Querschnittsscheiben  $n_S$ . Es ergeben sich die in Abbildung 5.2 dargestellten Grundzustände. Sie sind wegen der vorgenommenen Elimination in ihrer Erscheinung zufällig und hängen unter anderem von der Nummerierung der Knoten und Scheiben ab. Die Elimination wird allerdings so durchgeführt, dass die größte Verschiebung bzw. Verwölbung gleich eins bleibt.

### 5.2.2 Die Elimination der Membranschubverformungen

Die Membranschubverformung lässt sich analog zur Umfangsdehnung, in diesem Fall jedoch mit der Bedingung, dass die mittleren, elastischen Gleitungen verschwinden, eliminieren. Der Nachteil bei diesem Verfahren ist, dass damit bei geschlossenen Querschnitten der Kreisschubfluss nicht berücksichtigt werden kann. Deshalb ist es sinnvoll, stattdessen an den Knoten  $\boxed{r}$  das Gleichgewicht der elastischen Schubflüsse aller angrenzenden Scheiben zu bilden.

$$\sum_{s_A} T_{s_A, r} = 0 \quad (5.6)$$

Während bei offenen Querschnitten die Anzahl der aufzustellenden Eliminationsgleichungen gleich der Anzahl  $n_S$  der Scheiben ist, verringert sich diese bei geschlossenen Profilen um die Anzahl der geschlossenen Zellen. Diese berechnet sich aus der Anzahl der Scheiben, der Knoten und (bei zerfallenden Querschnitten) aus der Anzahl der Einzelquerschnitte  $n_{EQ}$  mit der Abzählformel

$$n_{Zellen} = n_S + n_{EQ} - n_K. \quad (5.7)$$

Da es weniger Gleichgewichtsbedingungen als Knoten gibt, ist die Auswahl der Knoten, an denen Gleichgewicht gebildet wird, nicht beliebig. Ein einfacher und gut funktionierender Weg besteht darin, sich diejenigen Scheiben zu merken, die bereits in Gleichgewichtsbedingungen eingegangen sind und immer einen derjenigen Knoten auszuwählen, bei denen die Anzahl der Scheiben, die bisher in keiner Gleichgewichtsbedingung eingegangen sind, ein Minimum ist. Ist dieses Minimum  $> 1$  so liegt eine geschlossene Zelle vor, an der ein Kreisschubfluss freigegeben werden muss, d.h. eine Eliminationsgleichung entfällt, indem an diesem Knoten eine bisher noch nicht in einer Gleichgewichtsbedingung verwendete Scheibe einfach als bereits verwendet deklariert wird. Auf diese Art und Weise erhält man auch die Anzahl der aufzustellenden Bedingungen.

Wie leicht zu erkennen ist, liefert dieses Verfahren ohne aufwendige geometrische Betrachtungen programmtechnisch sehr einfach und zuverlässig alle Grundzustände (ohne Scheibenschubfreiheitsgrade) für jeden Querschnitt, gleichgültig ob er geschlossen, mehrfach unter beliebigen Kontingenzwinkeln verzweigt oder gelagert ist.

Abbildung 5.3 zeigt am Beispiel des bereits vorgestellten offenen Zweischeibenquerschnitts die Grundzustände nachdem auch die Schubverformungen entfernt wurden. Bei der Behandlung der Querschnittslagerungen wird in Abbildung 5.6 ein geschlossenes, verzweigtes Profil dargestellt, bei dem die Scheibenschubverformungen ebenfalls eliminiert wurden.

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

VAX/VMS QEP V1.05

\*\* Grundzustände \*\*

24.06.1989 Nr.2944

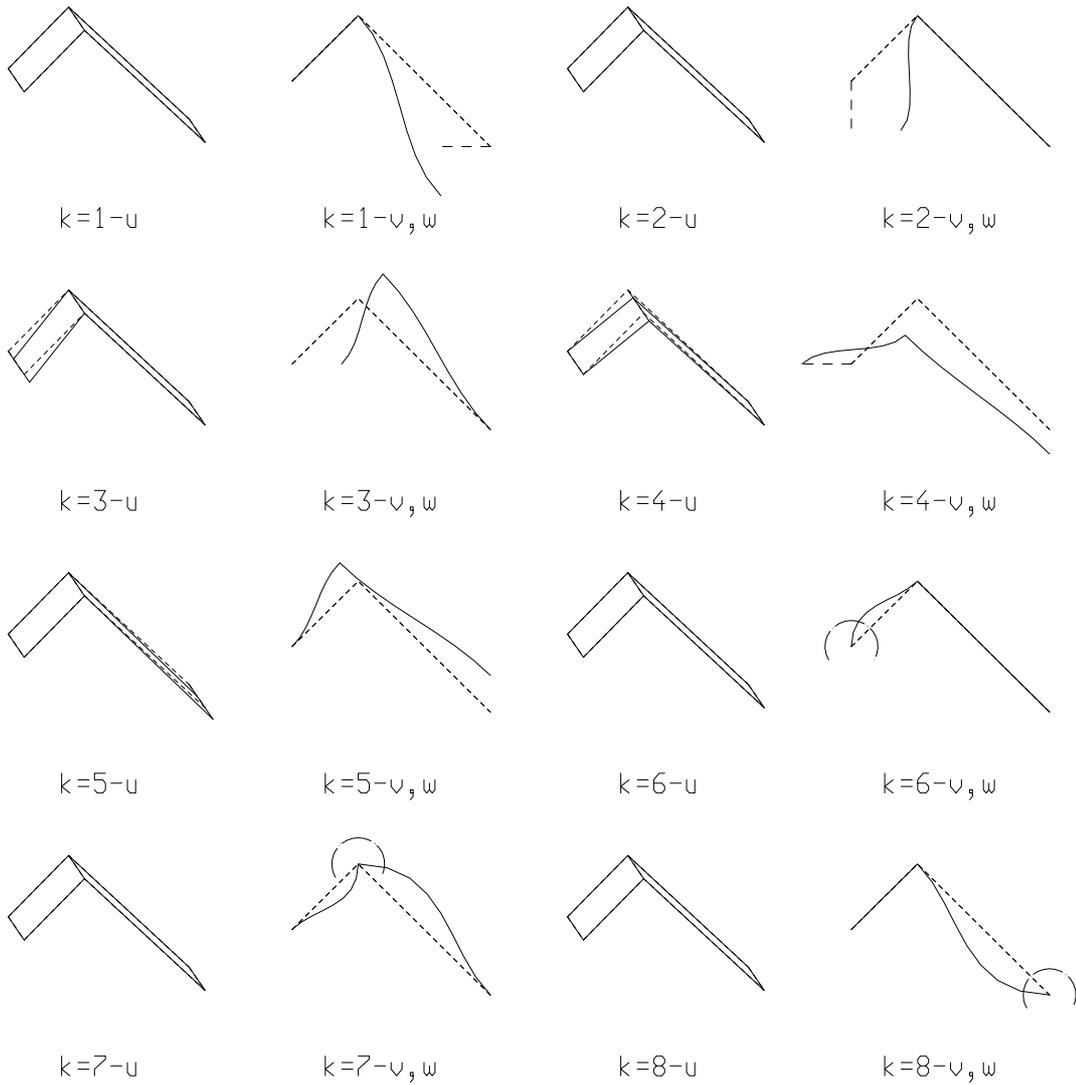


Abbildung 5.3: Die Grundzustände nach Elimination der Umfangsdehnungen und Membranschubverformungen

Bei der Formulierung des Gleichgewichts ist die Orientierung der Scheibe zu beachten, da das Vorzeichen des Schubflusses davon abhängt. Per Definition ist der Schubfluss positiv, wenn er am positiven Schnittufer vom Scheibenbeginn zum Scheibenende weist. Die Gleitungen und daraus die elastischen Schubflüsse berechnen sich aus den Verwölbungen und den Scheibenlängsverschiebungen zu

$$\begin{aligned}\gamma &= \left( \frac{u_e - u_b}{b} + \bar{f}_s \right) V' \\ T &= G \cdot t \cdot \gamma \\ &= Gt \left( \frac{u_e - u_b}{b} + \bar{f}_s \right) V'.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Setzt man dies noch in Gleichung (5.6) ein und klammert  $V'$  aus, so ergibt dies die für die Elimination erforderliche Bestimmungsgleichung.

### 5.2.3 Die Transformation der Membranschubverformungen

Betrachtet man beim Querschnitt mit ausgewähltem Schubfreiheitsgrad die Grundzustände vor der Orthogonalisierung, so fällt auf, dass es zwei Kategorien von Zuständen gibt:

- Verschiebungszustände, die nur Verschiebungen *in* der Querschnittsebene aufweisen
- Wölbzustände, die nur Verwölbungen *aus* der Querschnittsebene heraus zeigen (für jeden Knoten ein Wölbzustand)

Letztere, in denen auch der Normalkraftzustand enthalten ist, weisen einen Rangabfall für die Lösung der Differentialgleichungen auf, da die Verformungsgrößen  ${}^kV$  dieser Zustände keine mechanische Bedeutung haben, jedoch für die Lösung einen beliebigen Anfangswert benötigen. Führt man, wie in Kapitel 5.5 näher beschrieben, eine Orthogonalisierung über alle Zustände durch, so vermischen sich die Wölbzustände mit Rangabfall mit den Verschiebungszuständen derart, dass man selbst bei genauerer Untersuchung der Einheitszustände nicht mehr wissen kann, bei welchen Zuständen der vorhandene Rangabfall zu berücksichtigen ist. Dies führte in der Vergangenheit dazu, dass die Schubfreiheitsgrade für die praktische Anwendung unbrauchbar waren. Ein weiteres Phänomen bei dieser Behandlung der Zustände besteht darin, dass es für jede Hauptscheibe einen Verschiebungszustand gibt, der Gleitungen in der Scheibe aktiviert ohne Verwölbungen zu erzeugen. Beim Querschnitt mit nur einer Hauptscheibe verschwindet der Wölbwiderstand vollständig. Dieser Zustand entspricht dem Verformungsansatz  $\mathbf{c}$  in Abbildung 3.2 auf der gesamten Scheibe. Damit war der Querschnitt mit dem Lösungsansatz für Differentialgleichungen 4. Ordnung nicht mehr zu lösen.

Einen für die Ingenieurpraxis verwertbaren Schubansatz hat Hanf in [12] beschrieben. Sein Ansatz besteht im Wesentlichen darin, die Hauptscheibengleitungen zu eliminieren und die Schubverformungen in Form von Nebennotenverwölbungen zuzulassen, die als eigener Zustandsblock die Eigenschaft haben, nur Verwölbungen aufzuweisen. Weiterhin hat er den Schubeinfluss bei den Hauptscheiben durch zusätzliche Korrekturen, analog zu den  $\kappa$ -Beiwerten in der Technischen Biegetheorie, berücksichtigt. So ist es ihm nicht nur gelungen, die Zustände mit Rangabfall klar getrennt von den übrigen zu halten, diese Zustände können auch nach Bedarf an- oder abgewählt werden. Der einzige Nachteil dieses Verfahrens, der allerdings bei dem gewählten Lösungsverfahren keine Rolle spielt,

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

besteht darin, dass die Wölbwiderstände der Nebennotenverwölbungszustände mit den „klassischen“ verkoppelt sind.

Dieser Ansatz, die Schubzustände in Form reiner Wölbschubzustände vorzuhalten, diene als Vorlage für die Behandlung der allgemeinen Schubfreiheitsgrade. Die Lösung dieses Problems besteht darin, die Scheibenschubverzerrungen zu eliminieren, ohne sie zu eliminieren. Die Vorgehensweise erfolgt ähnlich wie bei der Elimination der Schubfreiheitsgrade, allerdings mit dem Unterschied, dass für die Elimination nur Wölbschubzustände ausgewählt werden und der entsprechende Wölbschubverformungszustand nicht entfernt (gestrichen) wird, sondern erhalten bleibt. Auf diese Art und Weise ergeben sich Grundzustände wie beim Querschnitt ohne Schubfreiheitsgrade und weitere Schubzustände, die allerdings weder linear unabhängig, noch orthogonal zu den unteren sind. Da sie keine Verschiebung in der Querschnittsebene aufweisen und somit keine Anteile zu  $\mathbf{B}$  liefern, können sie sofort  $(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{C}) \mathbf{X} = 0$  orthogonalisiert werden und liefern dabei den Normalkraftzustand.

In diesen Wölbschubzuständen sind die von Hanf beschriebenen Nebennotenverwölbungszustände enthalten. Allerdings sind sie noch vermischt und müssen noch getrennt und umgeformt werden, damit auch diese Ansätze verfügbar werden. Kern dieser Umformung besteht im Auffinden der Zustandsanteile, deren Gleitungen Arbeit an den Längsverschiebungen der vorhandenen Hauptscheiben leisten. Hierzu werden die Hauptscheiben benötigt. Um dies zu verdeutlichen betrachten wir die Abbildung 5.2. Dort erkennt man die drei Zustände 1, 2 und 4, an denen die beiden Scheiben, die in diesem Beispiel auch gleichzeitig die einzigen Hauptscheiben sind, Längsverschiebungen erhalten. Um aus diesen Verformungsansätzen die beiden linear unabhängigen Scheibenlängsverschiebungszustände zu ermitteln, müssen die Grundzustände 1 – 4 so miteinander kombiniert werden, dass die Arbeiten der Membrangleitungen untereinander verschwinden. Diese lassen sich einfach durch Lösung des speziellen Eigenwertproblems

$$(\mathbf{D}^M - \lambda\mathbf{E}) \mathbf{X} = 0 \quad (5.9)$$

berechnen. Diejenigen Zustände, deren Schubsteifigkeit nach dieser Orthogonalisierung ungleich Null sind, beschreiben die gesuchten Hauptscheibenzüge und können für den weiteren Gebrauch aufgehoben werden.

Im letzten Schritt werden die Wölbschubzustände eliminiert, die Arbeit an den Hauptscheibenlängsverschiebungen leisten. Der Arbeitsterm einer Scheibe ergibt sich aus dem Produkt der elastischen Scheibenschubkraft im Wölbzustand  $j$  mit der Längsverschiebung dieser Scheibe im Zustand  $k$ . Mit dem elastischen Scheibenschubfluss aus Gleichung (5.10) gilt dann für die Summe über alle Scheiben  $\textcircled{r}$

$$\sum_r b_r \cdot {}^j T_r \cdot {}^k \bar{f}_{s,r} = 0. \quad (5.10)$$

Auch dies führt zu einem homogenen Gleichungssystem dessen Fundamentalsystem die Zustände ohne Hauptscheibenmembrangleitung liefert, die fortan als Nebennotenverwölbungszustände bezeichnet werden. Abschließend werden die entfernten Hauptscheibenschubzustände wieder angefügt, damit später bei der Berechnung des Längssystems entschieden werden kann, welche Schubfreiheitsgrade angesetzt werden sollen.

Obgleich das Abtrennen der Hauptscheibenschubzustände an dieser Stelle beschrieben wurde, ist es sinnvoll, die Ermittlung der Hauptscheiben an dieser Stelle durchzuführen,

die Elimination allerdings erst später im Rahmen der Orthogonalisierung der Zustände durchzuführen.

### 5.2.4 Die Elimination der Knotenverdrehungen

Der Elimination der Knotenverdrehungen entspricht in [30] die Berechnung der Querbiegemomentenverläufe mittels der Flexibilitätsmatrix. Im Gegensatz zu der dort beschriebenen Vorgehensweise wird hier das Weggrößenverfahren verwendet. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Knotendrehwinkel, die zur Beschreibung der entsprechenden Freiheitsgrade herangezogen werden, bereits vorliegen, die Berechnung der Arbeitsterme auf ihnen beruht und das Kraftgrößenverfahren bei verzweigten Querschnitten an den Verzweigungsknoten mehr und unübersichtlicher zu verwaltende Informationen – die Querbiegemomente am Anfang und Ende jeder Querschnittsscheibe – vorhalten müsste. Die Darstellung der Ergebnisse der Querschnittswerte würde sich dadurch zusätzlich aufblähen. Als weiterer Grund sei erwähnt, dass bei der Programmentwicklung die Matrix der Querbiegemomente lediglich durch die Matrix der Knotenverdrehungen ersetzt wurde, was eine erneute Definition der Standardschnittstelle (Querschnittswertedatei) überflüssig machte. Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, dass sich die Querbiegemomente jederzeit einfach aus den Weggrößen berechnen lassen.

Aus der Bestimmungsgleichung für die Plattenmomente in Gleichung (4.15) ist ersichtlich, dass sich die Querbiegemomente  $m_{ss}$  im Wesentlichen aus der Querkrümmung (Profilverformung) ergeben und über das zweiachsige Spannungsgesetz weitere Anteile aus der Längskrümmung der Querschnittsscheibe erhalten. Knotenlinien, an denen Scheiben unterschiedlicher Neigung angreifen, erhalten auf Grund der hohen Steifigkeit der Scheiben um ihre starke Achse nur geringe Krümmungen, weshalb diese Anteile vernachlässigt werden können. Ist der Kontingenzwinkel zweier benachbarter Scheiben null, so sind die Anteile aus der Längskrümmung bei gleicher Scheibendicke identisch und heben sich beim Momentengleichgewicht an der Knotenlinie heraus. Daher können sie in diesem Falle ebenfalls außer Acht gelassen werden. Haben sie unterschiedliche Dicke, so sollten die Knotenverdrehungen berücksichtigt werden.

Zur Ermittlung der Querbiegemomente bleiben somit nur noch Anteile zu  $\mathbf{V}$  übrig, die – wie noch in Kapitel 5.4 gezeigt wird – in die Matrix der Querbiegesteifigkeit  $\mathbf{B}$  eingehen die der Systemsteifigkeitsmatrix eines ebenen Rahmensystems entspricht. Lediglich die Steifigkeiten unterscheiden sich: An Stelle der Dehnsteifigkeit tritt die Scheibensteifigkeit und die Biegesteifigkeit wird durch die Plattensteifigkeit ersetzt.

Um die Knotenverdrehungszustände von den Verwölbungs- und Verschiebungs- oder  $\mu$ -Zuständen sauber zu trennen, werden sie zuallerletzt aufgestellt. Die Vorgehensweise zur Berechnung der abhängigen Knotendrehwinkel ergibt sich aus der Bedingung, dass keine Momente auf die Knotenlinien und auch keine Belastungen direkt auf die Querschnittsscheiben wirken. In  $\mathbf{B}$  kann man 9 Untermatrizen erkennen.

$$\begin{pmatrix} B_{uu} & B_{u\mu} & B_{u\varphi} \\ B_{\mu u} & B_{\mu\mu} & B_{\mu\varphi} \\ B_{\varphi u} & B_{\varphi\mu} & B_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_u \\ Y_\mu \\ Y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_\mu \\ \mathbf{q}_\varphi \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Hierbei beziehen sich die Indizes mit  $u$  auf die zu den reinen Wölbzuständen gehörenden, verschwindenden Steifigkeiten und die Indizes  $\mu$  auf die zu den  $\mu$ -Zuständen gehörenden Steifigkeiten, Weggrößen und Lasten; die mit  $\varphi$  versehenen Werte gehören zu den

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

VAX/VMS QEP V1.05 \*\* Grundzustände \*\*

24.06.1989 Nr.2945

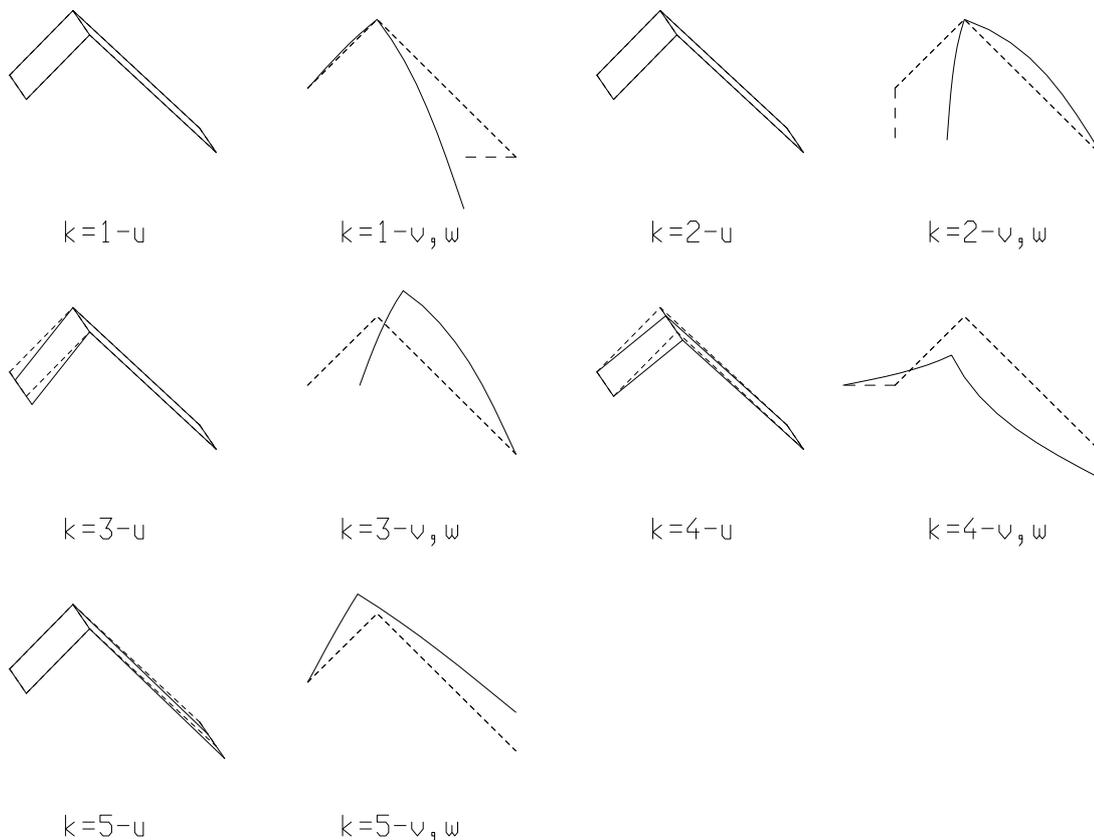


Abbildung 5.4: Die Grundzustände nach Elimination der Umfangsdehnungen, Membranschubverformungen und Knotenverdrehungen

Knotenverdrehungszuständen. Da es zusätzlich die Möglichkeit gibt, nur die Endknotenverdrehungen als unabhängige Freiheitsgrade auszuwählen, stimmt die zuvor gegebene Definition nicht ganz. Die mit  $\varphi$  versehenen Felder gehören zu den zu eliminierenden Knotenverdrehungen, die mit  $\mu$  gekennzeichneten gehören zu allen übrigen Einheitsverformungszuständen, die Verformungen in der Querschnittsebene hervorrufen.

Unter der Voraussetzung, dass im Sinne der  $\varphi$ -Zustände keine Lasten aufgebracht werden und unter Streichung der Zeilen und Spalten, die zu den reinen Wölbzuständen  $u$  gehören, wird der Belastungsvektor

$$\mathbf{q}_\varphi = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

und aus dem unteren Teil der Gleichung (5.11) lässt sich somit die Bestimmungsgleichung der abhängigen Weggrößen  $\mathbf{Y}_\varphi$  herleiten:

$$\mathbf{Y}_\varphi = -\mathbf{B}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{\varphi\mu} \cdot \mathbf{Y}_\mu \quad (5.13)$$

Damit sind die abhängigen Knotendrehwinkel bekannt. Die Grundzustände die sich daraus ergeben sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Obleich die Zusammenstellung der Verformungswiderstände erst in Kapitel 5.4 erfolgt, wird hier vorweg beschrieben, wie bei

ihrer Berechnung Zeit gespart werden kann. Setzt man  $\mathbf{Y}_\varphi$  noch in den oberen Teil der Gleichung (5.11) ein, so wird daraus

$$\mathbf{B}_{\mu\mu} \cdot \mathbf{Y}_\mu - \mathbf{B}_{\mu\varphi} \cdot \mathbf{B}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{\varphi\mu} \cdot \mathbf{Y}_\mu = \mathbf{q}_\mu. \quad (5.14)$$

Fassen wir nun noch die Koeffizienten von  $\mathbf{Y}_\mu$  zusammen, so erhalten wir die zu den reduzierten Zuständen gehörende Matrix

$$\mathbf{B}_{\mu\mu}^* = \mathbf{B}_{\mu\mu} - \mathbf{B}_{\mu\varphi} \cdot \mathbf{B}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{B}_{\varphi\mu}. \quad (5.15)$$

Somit wird aus den Gleichungen (5.14) und (5.15)

$$\mathbf{B}_{\mu\mu}^* \cdot \mathbf{Y}_\mu = \mathbf{q}_\mu. \quad (5.16)$$

Durch diese einfache Transformation kann auf die erneute Berechnung der Matrix der Querbiegesteifigkeiten verzichtet werden.

## 5.3 Die kontinuierliche Lagerung des Querschnitts

Die Lagerung von Querschnitten ist ein beliebtes Hilfsmittel, um die Wechselwirkung zwischen Einzelbauteil und Gesamttragwerk wenigstens näherungsweise zu erfassen. Die im Rahmen dieser Arbeit berücksichtigten Querschnittslager sind als Federn vorgesehen, lassen jedoch, mit Ausnahme der Schubbettung, den Grenzübergang zu unendlichen Steifigkeiten zu, die dann, wie nachfolgend beschrieben, gesondert behandelt werden müssen. Die 4 vorgesehenen Lagerungstypen sind

- Bettung der Knotenlinien
- Drehbettung der Knotenlinien
- Schubbettung der Knotenlinien
- Scheibendrehbettung

Die dazugehörenden „unendlich“ steifen Lagerungen sind:

- Pendelstab (kontinuierliche Lagerung) an Knotenlinien
- Verschiebliche Einspannung an Knotenlinien
- –
- Verschiebliche Einspannung an Scheiben

Aus der Kombination dieser 7 Typen lassen sich alle üblichen Lagerungsbedingungen zusammenstellen. Während die Federn nur zusätzliche Steifigkeiten liefern, bedingen die festen Lagerungen in den meisten Fällen eine Abnahme der Zustände. Die starren Lagerungsbedingungen führen, stellt man sie alle zusammen, wiederum zu einem homogenen Gleichungssystem, dessen Fundamentalsystem die gelagerten Grundzustände liefert. In

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

den nachfolgenden Unterkapiteln werden nur die Bedingungen aufgeführt, die in das homogene Gleichungssystem eingehen. Die zur Veranschaulichung herangezogenen Bilder zeigen unterschiedliche, gelagerte Querschnittstypen die berechnet werden können. Da für die Darstellung der Wirkung der Lager nur wenige Zustände notwendig sind, wurden in den Beispielen nur Wölb- und Plattenfreiheitsgrade ausgewählt.

Die Behandlung der Federn kann grundsätzlich an unterschiedlichen Stellen berücksichtigt werden. Einerseits kann man sie als Ergänzung der Querschnittswerte betrachten und dort bereits bei den Steifigkeiten hinzufügen, wobei noch offen ist, ob man sie vor oder nach der Orthogonalisierung der Zustände hinzufügt, andererseits kann man sie dem Längssystem zuordnen und beim Aufstellen des Differentialgleichungssystems ergänzen. Beide Vorgehensweisen haben ihre Stärken; daher werden auch beide beschrieben

### 5.3.1 Die Pendelstäbe

Durch Anbringen eines Pendelstabes an einem Knoten ergibt sich für diesen eine Abhängigkeit der 2 Verschiebungskomponenten von der Lagerneigung. Bezeichnen wir mit  $\alpha_{r,n}^P$  die Neigung des Pendelstabes  $n$  am Knoten  $\boxed{r}$ , so folgt daraus die Abhängigkeit

$$v_r \cdot \cos \alpha_{r,n}^P + w_r \cdot \sin \alpha_{r,n}^P = 0, \quad (5.17)$$

womit eine unabhängige Verschiebungsgröße abhängig wird (Abbildung 5.5). Greifen zwei solche Stäbe mit unterschiedlicher Neigung an einem Knoten an, so wird dieser unverschieblich wie in Abbildung 5.7 zu sehen ist.

### 5.3.2 Die verschiebliche Einspannung an Knoten

Die Bedingung für die Knotenverdrehungen ist denkbar einfach zu handhaben. Es fällt von den Grundzuständen vor einer eventuell vorzunehmenden Elimination der Knotenverdrehungen derjenige heraus, der der Verdrehung am gelagerten Knoten entspricht. Diese Form der Lagerung bewirkt nur dann eine Verringerung an Zuständen, wenn die Knotenverdrehungen als freie Verformungsansätze gewählt wurden. Ansonsten bewirkt sie nur eine Veränderung des Charakters der Zustände. In Abbildung 5.6 ist ein geschlossener Querschnitt dargestellt, dessen Kragarm zusätzlich zur Verschieblichen Einspannung noch fest gelagert ist, also eine unverschiebliche Einspannung aufweist.

### 5.3.3 Die verschiebliche Einspannung der Scheiben

Die verschiebliche Scheibeneinspannung liefert für jede eingespannte Scheibe die Bedingung

$$\hat{f}_{\bar{s}} = 0 \equiv \vartheta = 0 \quad (5.18)$$

und verringert wiederum die Anzahl der Zustände um die Anzahl der gelagerten Scheiben. Abbildung 5.7 zeigt sie nach Einarbeitung dieser Lagerungsbedingung.

## 5.4 Die Querschnittssteifigkeiten

Nachdem die Formen der Grundzustände festgelegt sind, werden jetzt die Widerstände ermittelt, die sie ihren Verformungen entgegensetzen.

MS/DOS VTB\_QEP V2.00 \*\* Grundzustaeende \*\*

22.03.1991 Nr.4048

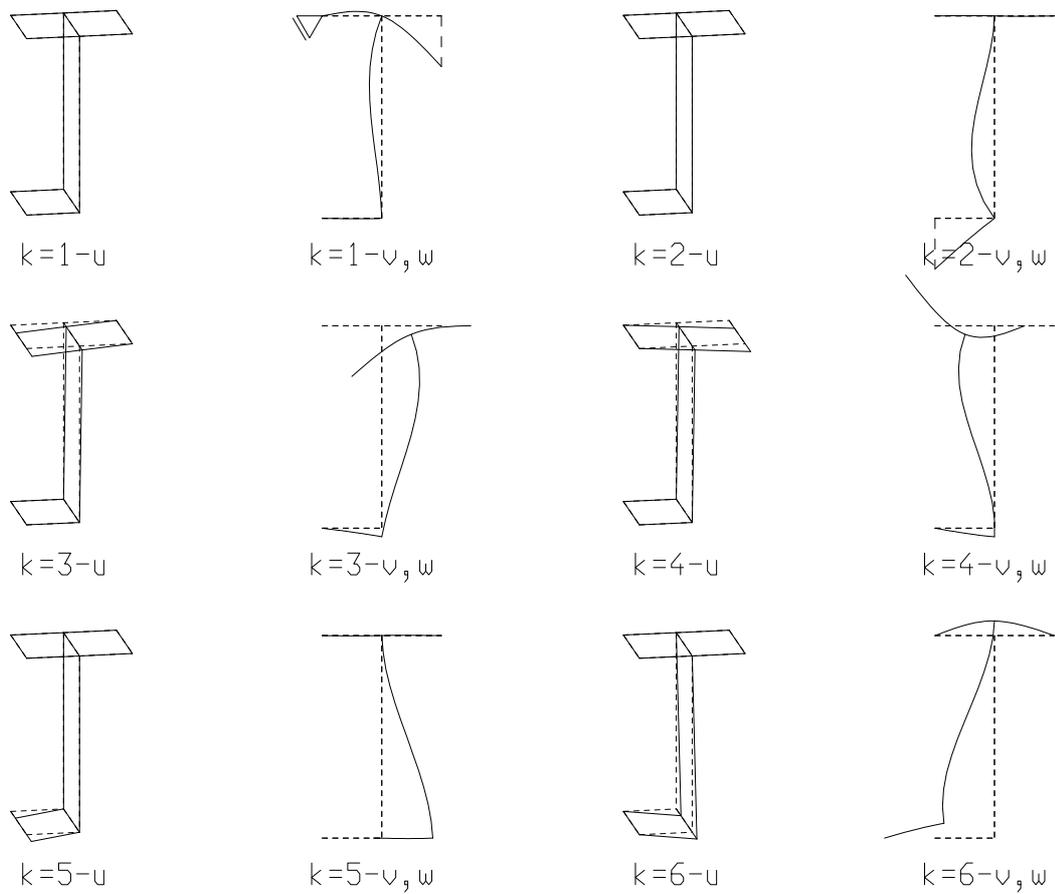


Abbildung 5.5: Die Grundzustände nach Lagerung durch einen um 30 Grad gegen die Horizontale geneigten Pendelstab am linken oberen Knoten

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

VAX/VMS VTB-QEP\_V1.02 \*\* Grundzustaende \*\* 12.06.1990 Nr.2244

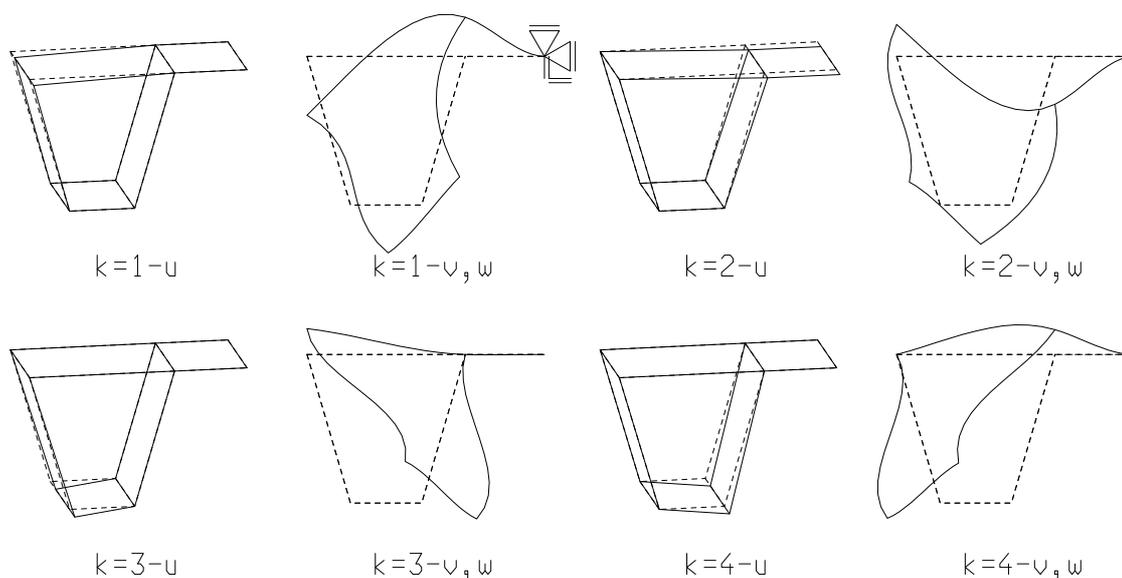


Abbildung 5.6: Die Grundzustände nach Einarbeitung einer unverschieblichen Einspannung am oberen rechten Knoten

In den Kapiteln 3 und 4 wurden bereits getrennt die Arbeitsterme jeweils einer Scheibe und Platte hergeleitet. Da ein Querschnitt üblicherweise aus mehr als einer Scheibe besteht, werden die Arbeitsterme der einzelnen Scheibe mit dem Index  $i_S$  versehen. Fassen wir nun die Terme zusammen, so ergibt sich daraus für die Membrananteile

$${}^{kj}C^M = \sum_{i_S=1}^{n_S} {}^{kj}C_{i_S}^M \quad (5.19)$$

$${}^{kj}D_1^M = \sum_{i_S=1}^{n_S} {}^{kj}d_{1,i_S}^M \quad (5.20)$$

$${}^{kj}D_2^M = \sum_{i_S=1}^{n_S} {}^{kj}d_{2,i_S}^M \quad (5.21)$$

$${}^{kj}B^M = \sum_{i_S=1}^{n_S} {}^{kj}b_{i_S}^M \quad (5.22)$$

Für die Plattenanteile ersetzen wir den Hochindex  $()^M$  durch  $()^B$ . Diese Terme, die bisher kommentarlos eingeführt wurden, haben folgende Bedeutung: mit  $C$  werden die Arbeiten bezeichnet, die die Längsspannungen an den Verwölbungen des Querschnitts leisten;  $D$  beschreibt die Arbeiten der Schubspannungen an den Gleitungen und  $B$  die Arbeiten der Umfangsspannungen an den Umfangsdehnungen. Diese entstehen sowohl aus den Membranverformungen als auch aus den Plattenverformungen (Querbiegung).

Es fehlen allerdings noch die Federanteile  ${}^{kj}B^F$ , die sich aus elastischer Lagerung ergeben. Sie liefern ausschließlich Anteile zur Querbiegesteifigkeit des Systems und sind in Kapitel 9.1.3 zusammengestellt. Da in den Zuständen üblicherweise alle Terme auftreten,

VAX/VMS VTB-QEP\_V1.02 \*\* Grundzustaende \*\* 12.06.1990 Nr.2246

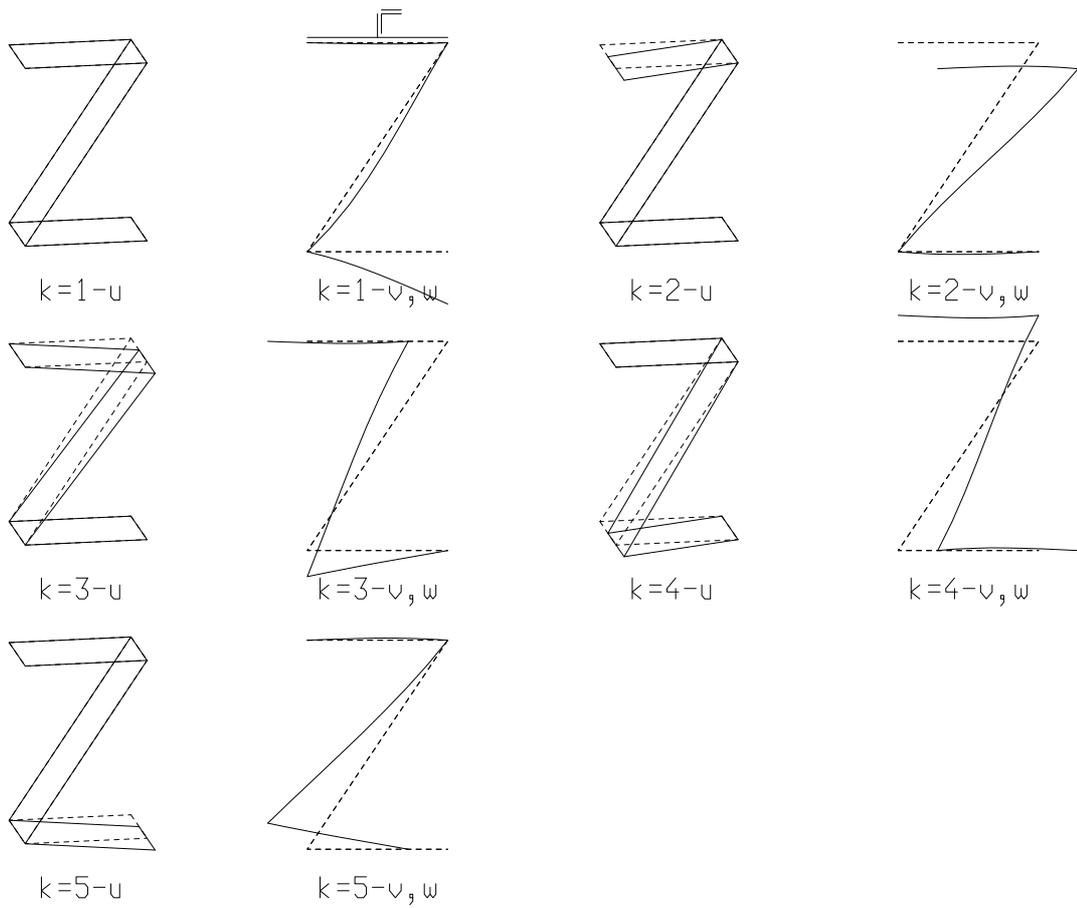


Abbildung 5.7: Die Grundzustände nach Einarbeitung einer verschieblichen Einspannung der oberen Scheibe

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

werden als Summe für die zwei bzw. drei Anteile die Abkürzungen

$${}^{kj}C = {}^{kj}C^M + {}^{kj}C^B \quad (5.23)$$

$${}^{kj}D_1 = {}^{kj}D_1^M + {}^{kj}D_1^B \quad (5.24)$$

$${}^{kj}D_2 = {}^{kj}D_2^M + {}^{kj}D_2^B \quad (5.25)$$

$${}^{kj}B = {}^{kj}B^M + {}^{kj}B^B + {}^{kj}B^F \quad (5.26)$$

eingeführt. Fasst man außerdem noch die  $D$ -Anteile zusammen zu

$${}^{kj}D = {}^{kj}D_1 + {}^{kj}D_2 + {}^{kj}D_2^T, \quad (5.27)$$

so schreibt sich die Variationsgleichung mit Platten- und Scheibenanteilen, summiert über alle Scheiben und erweitert auf alle Zustände, in ihrer endgültigen Form als

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} = & \sum_k^{n_Z} \sum_j^{n_Z} \left( \int_l (E^{kj}C {}^jV'''' - G^{kj}D {}^jV'' + {}^{kj}B {}^jV) \delta^kV \, dx \right. \\ & - \left( E^{kj}C {}^jV''' - G ({}^{kj}D - {}^{jk}D_2) {}^jV' \right) \delta^kV \Big|_0^l \\ & \left. + \left( E^{kj}C {}^jV'' - G^{kj}D_2 {}^jV \right) \delta^kV \Big|_0^l \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Wie obige Formel zeigt, werden die Widerstände  $D_2$  zur Formulierung der Randbedingungen benötigt. Zur Form der Differentialgleichung ist zu bemerken, dass sie in zwei Punkten von der Formulierung in [30] abweicht:

1. sind dort die Vorzeichen von  $D_2$  entgegengesetzt definiert
2. wurde dort nicht der Schubmodul  $G$  sondern  $\mu E$  als Faktor vor die Steifigkeitsmatrix  $D_2$  gezogen.

Wegen der systematischeren Darstellung und weil hier in  $D_2$  nicht nur Platten- sondern auch Scheibenanteile enthalten sind, wurden die in der Gleichung (5.28) dargestellten Definitionen gewählt.

Zur dargestellten Indizierung ist zu bemerken, dass sich der erste links oben stehende Index auf die Differentialgleichung des  $k$ -ten Zustandes bezieht und der zweite auf die Verformungen des Zustands  $j$ . Diese Reihenfolge entspricht den Zeilen- und Spaltenindizes bei der Matrizenrechnung und wurde deshalb rein formal ausgewählt.

Nachdem die Widerstände bekannt sind, ist es sinnvoll, an dieser Stelle die Schnittgrößen nach [30] zu definieren. Der Wölbwiderstand besteht nun aus der Summe der Membran- und Biegeanteile.

$$\begin{aligned} {}^kW &= -E \cdot {}^kC \cdot {}^kV'' \\ {}^kS &= -E \cdot {}^kC \cdot {}^kV''' \end{aligned} \quad (5.29)$$

Das sind die Resultierende der Spannungen (Moment) und ihre Änderung (Querkraft).

## 5.5 Die Ermittlung der Einheitszustände durch Orthogonalisierung

Die nachfolgend beschriebene Vorgehensweise bei der Ermittlung der Einheitszustände entspricht, sieht man von den Ergänzungen für die Schubzustände ab, den Schritten, die in [30] beschrieben werden. Sie passt sich daher ohne große Änderungen in die bekannte Theorie ein. Sie gilt im Wesentlichen sowohl für gelagerte als auch ungelagerte Querschnitte. Bei gelagerten Querschnitten kann es vorkommen, dass eventuell einer oder mehrere der nachfolgend beschriebenen Schritte entfallen.

Zu den Symbolen ist zu bemerken, dass sie die im vorigen Kapitel beschriebenen Bezeichnungen für die Steifigkeiten in Matrixschreibweise darstellen.

Wurden Schubfreiheitsgrade ausgewählt, so werden in einem ersten Schritt die Wölbschubzustände orthogonalisiert. Da diese Zustände keine Verschiebungen in der Querschnittsebene aufweisen gibt es auch keine Querbiegesteifigkeit  $\mathbf{B}$ . Daher kann für sie das Eigenwertproblem für Matrizenpaare für die Drillwiderstände  $\mathbf{D}$ , die auch nur Membrananteile enthalten, und die Wölbwiderstände  $\mathbf{C}$

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{C}) \mathbf{X} = 0 \quad (5.30)$$

gelöst werden. Dabei kann es zu doppelten Eigenwerten kommen; z.B. bei I-Profilen wo sich Ober- und Untergurt unabhängig voneinander verformen können. Ist dies der Fall, so werden sie dergestalt umgeformt, dass es einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Zustand gibt. In jedem Fall sind die beiden Matrizen im Bereich der Wölbschubzustände vollkommen diagonal. Nun ist es an der Zeit die Wölbschubzustände zu trennen, die an den Hauptscheibenlängsverschiebungen Arbeit leisten. Dies erfolgt wie in Kapitel 5.2.3 beschrieben. Abschließend werden die Hauptscheibenschubverformungszustände nochmals orthogonalisiert. Es bleiben danach außerdiagonale Elemente mit den Nebennotenverwölbungszuständen und den übrigen „klassischen“ Zuständen. Dies stellt für die Berechnung keine Problem dar, hat aber Auswirkungen auf die Definition der Schnittgrößen.

Nach Behandlung der Schubzustände geht es in bekannter Manier weiter. Es wird das Eigenwertproblem für Matrizenpaare für die Querbiegegewiderstände  $\mathbf{B}$  und die Wölbwiderstände  $\mathbf{C}$

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{C}) \mathbf{X} = 0 \quad (5.31)$$

gelöst. Die von Null verschiedenen Eigenwerte liefern die Zustände mit Profilverformung. Den Nullen in  $\mathbf{B}$ , die ja schon in der bisherigen Theorie auftreten, sind mehrfache Nulleigenwerte zugeordnet.

Für die weiteren Orthogonalisierungen wird der gleiche Weg wie in [30] beschritten. Die Zustände, die Nulleigenwerte lieferten, werden im zweiten Schritt unter Verwendung der Drillwiderstände  $\mathbf{D}$  mit der Bedingung

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{C}) \mathbf{X} = 0 \quad (5.32)$$

orthogonalisiert. Die hieraus folgenden Nulleigenwerte enthalten die noch vermischten Starrkörperverschiebungen, die ihrerseits durch Lösung des Eigenwertproblems zwischen der Matrix  $\mathbf{K}$  der Abtriebskräfte aus dem Normalkraftzustand und den Wölbwiderständen

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{C}) \mathbf{X} = 0 \quad (5.33)$$

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

voneinander getrennt werden. Damit liegen die für die Lösung der Differentialgleichung erforderlichen Modalformen vor.

Die zuvor beschriebene Orthogonalisierung geht auf die Annahme zurück, dass sowohl die Matrizen  $\mathbf{C}$  als auch  $\mathbf{B}$  in Diagonalf orm vorliegen müssen und eine Verkoppelung der Zustände lediglich über die Matrix der Drillsteifigkeiten  $\mathbf{D}$  erfolgt. Das später dargestellte Lösungsverfahren mit dem Reihenansatz erlaubt es problemlos auch mit vollbesetzten Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{C}$  oder  $\mathbf{B}$  zu arbeiten, so dass wir diese Forderung außer Acht lassen können.

Die unteren Zustände können (zusammen mit dem Normalkraftzustand) wie beim Querschnitt ohne Schubverzerrung orthogonalisiert werden. Dies legt den Schluss nahe, dass man grundsätzlich bei der Berechnung der Querschnittswerte die Schubzustände erzeugen kann, und erst bei der Lösung der Differentialgleichungen entscheiden muss, ob man sie auch verwenden möchte.

### 5.6 Die Verläufe der Scheibenspannungen aus elementarem Gleichgewicht

Wie bereits in Kapitel 3 angesprochen, stellt der dort beschriebene Verlauf der Schub- und Umfangsspannungen nur das Mittel der tatsächlich auftretenden Spannungen dar, da das Elastizitätsgesetz nur für die Mittelwerte aufgestellt worden ist. Um nun die Verläufe beider Anteile über die Scheibenbreite zu erhalten, müssen elementare Gleichgewichtsbedingungen herangezogen werden. Dazu ist in Abbildung 5.8 ein Scheibenelement konstanter Dicke  $t$  mit den an den Schnittufern wirkenden Spannungen dargestellt.

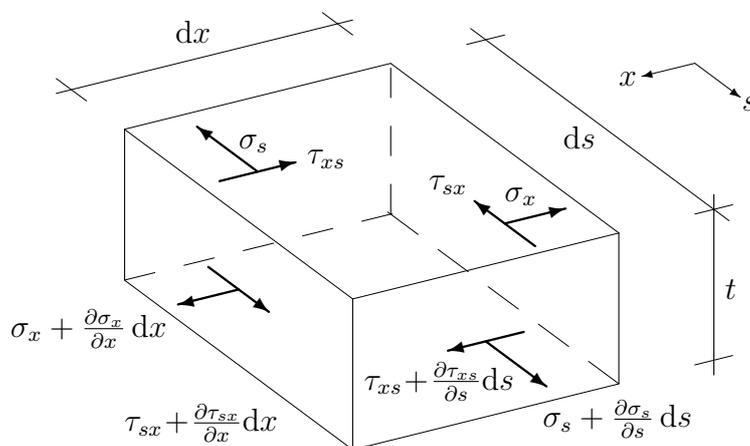


Abbildung 5.8: Scheibenelement mit Spannungen (Abmessungen  $dx$ ,  $t$  und  $ds$ )

#### 5.6.1 Die Berechnung der Scheibenschubspannungen

Um den Verlauf der Scheibenschubspannungen berechnen zu können, ist es sinnvoll, sich einen Anfangswert an jeder Scheibe zu definieren, über den der Spannungsverlauf formuliert wird. Mit diesen Anfangswerten lassen sich die Schubflüsse an jedem Scheibenpunkt über die Veränderung der Längsspannungen aus  $\sum x = 0$  nach Abbildung 5.8 berechnen.

## 5.6 Die Verläufe der Scheibenspannungen aus elementarem Gleichgewicht

Weil es sich hier eindeutig um Membrananteile handelt, wird nachfolgend der Hochindex  $()^M$  weggelassen.

$$0 = \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial s} ds \cdot t \cdot dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \cdot t \cdot ds \quad (5.34)$$

$$\tau_{xs} = - \int_s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} ds \quad (5.35)$$

Der hier eindeutige Index  $()_{xs}$  wird nachfolgend weggelassen. Zusätzlich wird mit der nachfolgenden Definition für die resultierenden Schubspannungen aus elastischen ( $\tau_{el}$ ) und Gleichgewichtsanteilen ( $\tau_g$ )

$$\tau = \tau_{el} + \tau_g, \quad (5.36)$$

zunächst nur der Gleichgewichtsanteil betrachtet. Mit dem Verlauf der Längsspannungen aus Gleichung (3.14) und der Definition der Schnittgrößen gemäß Gleichung (5.29) gilt:

$$\begin{aligned} \tau_g(s, x) &= - \int_s \frac{2\mu E \hat{f}_s}{b(1-\mu^2)} V' ds \\ &\quad - \int_s \left( \frac{\bar{u}}{1-\mu^2} + (2\eta-1) \hat{u} \right) EV''' ds \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{\mu E (2\eta-1) \hat{f}_s}{1-\mu^2} V' + \tau_b W' \\ &\quad + \left( \frac{b\eta \bar{u}}{1-\mu^2} + b(\eta^2-\eta) \hat{u} \right) \frac{W'}{C}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Dabei wurden mit der Integration zwei Konstanten eingeführt. Zu der einen ( $\tau_b$ ) wird später noch etwas zu sagen sein, die andere („1“), die unterstrichen im Klammerausdruck zu  $V'$  steht, wurde so gewählt, dass in der nachfolgenden resultierenden Gleichgewichtsscheibenschubkraft, die sich aus der Integration der Schubspannungen über die Scheibenfläche ergibt, die Anteile zu  $V'$  entfallen.

$$S_{k,g} = \tau_b b t W' - \left( \frac{\bar{u}}{2(1-\mu^2)} - \frac{1}{6} \hat{u} \right) b^2 t \frac{W'}{C} \quad (5.39)$$

Diese Gleichungen sind zunächst so allgemein gehalten, dass sie grundsätzlich unabhängig von der Auswahl der Freiheitsgrade sind. Für ihre richtige Anwendung müssen allerdings folgende Fallunterscheidungen getroffen werden:

1. Bei der Berechnung der Querschnittswerte wurden die Schubverformungen und eventuell darüber hinaus auch die Umfangsdehnungen als Freiheitsgrad gewählt.
2. Schubfreiheitsgrade liegen nicht vor:
  - a) Der Querschnitt ist offen.
  - b) Der Querschnitt ist geschlossen.

Im Fall 1 ist die Berechnung der Schubspannungen am Scheibenanfang denkbar einfach. Da jede Scheibe einen über ihre Breite konstanten Schubfreiheitsgrad aufweist, muss die

## 5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

resultierende Schubkraft über diese elastische Verformung zu berechnen sein, d.h. die resultierende Scheibenschubkraft aus dem Gleichgewicht  $S_{k,g}$ , die im Fall 2 mangels eines Elastizitätsgesetzes berechnet wird, muss verschwinden. Somit ergeben sich die Schubspannungen am Scheibenanfang zu

$$\tau_b = - \left( \frac{\bar{u}}{2(1-\mu^2)} - \frac{1}{6}\hat{u} \right) \frac{b}{C}. \quad (5.40)$$

Fällt der Freiheitsgrad Umfangsdehnungen fort  $\hat{f}_s = 0$ , so ist das zweiachsige Spannungsgesetz durch das einachsige zu ersetzen, d.h. die Terme  $1 - \mu^2$  werden dort durch 1 ersetzt, wo der Zähler nicht sowieso verschwindet.

Fallen auch die Membranschubverformungen fort, liegt also Fall 2 vor, dann kann der Anfangswert  $\tau_b$  nur noch über Gleichgewicht der Scheibenschubflüsse an den Knotenlinien berechnet werden.

Beim offenen Querschnitt lassen sich die Schubflüsse am Scheibenanfang berechnen, indem man von den Endknoten ausgehend an den Knotenlinien Gleichgewicht bildet. Dazu wird je nach Lage der Scheiben auch der Endwert der Schubspannung/des Schubflusses benötigt.

$$\tau_e = \tau_b + \frac{b\bar{u}}{C} \quad (5.41)$$

Dieser Ausdruck ist deshalb so einfach, weil bei dieser Form der Berechnung sowohl die Umfangsdehnungen als auch die Membranschubverformungen herausfallen und damit nur noch Koeffizienten zu  $W'$  bleiben.

Schwieriger wird es bei den geschlossenen Zellen. Ausgehend von den Endknoten wird – wie auch bei den offenen Profilen – an den Knotenlinien solange Gleichgewicht der Schubflüsse gebildet, bis an einer Knotenlinie mehr als ein unbekannter Scheibenschubfluss vorliegt. Dann wird die Zelle aufgeschnitten. Abgesehen von einer noch zu bestimmenden Integrationskonstanten wird von diesem Schnitt ausgehend weiter Gleichgewicht gebildet (und eventuell weitere Zellen geschnitten), bis für alle Scheiben die Schubflüsse berechnet wurden. Unter der Annahme, dass zu den ermittelten Schubspannungen Gleitungen gehören, wird für jede aufgeschnittene Zelle die Verschiebung der Schnittufer berechnet. Die bisher noch unbekanntenen Integrationskonstanten werden so berechnet, dass die gegenseitige Verschiebung der Schnittufer verschwindet. Bei mehrzelligen Querschnitten erfordert dies die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Dazu werden an den Schnittufern der Zellen nacheinander Einheitsschubflüsse  $T_i$  aufgebracht und die daraus resultierenden gegenseitigen Verschiebungen  $\delta_{ij}$  aller Schnittufer  $j$  berechnet.

$$\delta_{ij} = \sum_{i_s=1}^{n_s} \int_s \frac{T_i \cdot T_j}{Gt} ds \quad (5.42)$$

Diese entsprechen der Flexibilitätsmatrix beim Kraftgrößenverfahren. Die rechten Seiten bilden die Relativverschiebungen, die sich am aufgeschnittenen System infolge der Gleichgewichtsschubflüsse ergeben. Sie lassen sich auch mit dem PdvK berechnen.

$$\delta_{i0} = \sum_{i_s=1}^{n_s} \int_s \frac{T_i \cdot T_0}{Gt} ds \quad (5.43)$$

## 5.6 Die Verläufe der Scheibenspannungen aus elementarem Gleichgewicht

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die Superpositionsamplituden  $T_j$  der Einheitsschubflüsse zu den Gleichgewichtsschubflüssen  $T_0$ .

Die aus dieser Berechnung stammenden, über die Kreiszellen verlaufenden Schubspannungen haben keine elastische Verformungsresultante. Vielmehr liefern sie die Schubspannungsverläufe für den Fall  $V' = 0$  in jedem Zustand. Dieser Fall liegt bei der starren Kopfplatte vor.

Die elastischen Anteile kommen dann ausschließlich zum Tragen, wenn  $W' = 0$  ist. Das liegt z. B. beim einseitig gabelgelagerten Stab vor, der am anderen Ende mit einem Torsionsmoment belastet ist. In diesem Fall ist an beiden Stabenden  $\sigma_x = 0$  und die Torsion wird ausschließlich über elastische Schubverformungen (Kreisschubflüsse) abgetragen. Da bei der Elimination der Schubfreiheitsgrade an den Knotenlinien Gleichgewicht der elastischen Schubflüsse gebildet wurde, halten die dort aufgestellten Einheitsverformungszustände und die daraus gebildeten Modalformen die notwendigen Gleichgewichtsbedingungen ein.

Die Bestimmungsgleichung für die Schubspannungen wird dadurch, ergänzt um die Membrangleitungen, zu

$$\tau(s, x) = \tau_1(s) \cdot V'(x) + \tau_2(s) \cdot W'(x) \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} &= \left( G \left( \frac{2}{b} \hat{u} + \bar{f}_s \right) - \frac{\mu E (2\eta - 1) \hat{f}_s}{1 - \mu^2} \right) V' \\ &\quad + \tau_b W' + \left( \frac{b\eta \bar{u}}{1 - \mu^2} + b(\eta^2 - \eta) \hat{u} \right) \frac{W'}{C}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Durch Integration der Schubspannungen über die Scheibenfläche erhält man die Scheibenschubkraft, ebenfalls ergänzt um die elastischen Anteile. Sie wird aus der Beziehung

$$S_k = Gbt \left( \frac{2}{b} \hat{u} + \bar{f}_s \right) V' + \tau_b bt W' + \left( \frac{\bar{u}}{2(1 - \mu^2)} - \frac{1}{6} \hat{u} \right) b^2 t \frac{W'}{C} \quad (5.46)$$

berechnet, wobei immer entweder der Koeffizient zu  $V'$  oder die Summe der Koeffizienten zu  $W'$  in Abhängigkeit von den ausgewählten Freiheitsgraden zu Null wird.

### 5.6.2 Der Verlauf der Umfangsspannungen

Da die Umfangsspannungen, ebenso wie die Schubspannungen, zunächst nur im Mittel berechnet wurden, muss ihr Verlauf ebenfalls über eine Gleichgewichtsbetrachtung am Element Abbildung 5.8 aus  $\sum s = 0$  ermittelt werden.

$$0 = \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} ds \cdot t \cdot dx + \frac{\partial \tau_{sx}}{\partial x} dx \cdot t \cdot ds \quad (5.47)$$

$$\sigma_s = - \int_s \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial x} ds \quad (5.48)$$

Dabei wurde schon der Zusammenhang  $\tau_{sx} = \tau_{xs}$  eingesetzt. Wie bei der Berechnung der Schubspannungsverläufe wird dieser Ausdruck unter Verwendung der Gleichung (5.45) über die Scheibenbreite integriert.

$$\sigma_{s,g}(s, x) = \int_s \left( G \left( \frac{2}{b} \hat{u} + \bar{f}_s \right) - \frac{\mu E (2\eta - 1) \hat{f}_s}{1 - \mu^2} \right) V'' ds + \int_s \tau_b b \eta W'' ds$$

5 Die Ermittlung der Querschnittswerte

$$+ \int_s \left( \frac{\bar{u}}{1-\mu^2} \eta + (\eta^2 - \eta) \hat{u} \right) b \frac{W''}{C} ds \quad (5.49)$$

$$= \left( G \left( \frac{2}{b} \hat{u} + \bar{f}_s \right) \left( \eta - \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu E \left( \eta^2 - \eta + \frac{1}{6} \right) \hat{f}_s}{1-\mu^2} \right) b V'' + \tau_b b \left( \eta - \frac{1}{2} \right) W''$$

$$+ \left( \frac{\bar{u}}{1-\mu^2} \left( \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{\eta^3}{3} - \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{6} \right) \hat{u} \right) b^2 \frac{W''}{C} \quad (5.50)$$

Es wurden hierin Integrationskonstanten so eingeführt, dass der Mittelwert von  $\sigma_{s,g}$  zu Null wird. Für den Absolutwert der Umfangsspannungen sind nur noch die mittleren Spannungen  $\sigma_s^M$  aus Gleichung (3.14) zu addieren.

# 6 Die Querschnittswerte Theorie

## 2. Ordnung

Nachdem nunmehr alle Querschnittswerte, die für die Berechnung nach Theorie 1. Ordnung erforderlich sind, vorliegen, ist es angebracht, sich den Anteilen nach 2. Ordnung zuzuwenden. Bezüglich deren Herleitung liegen verschiedene Arbeiten vor, von denen nur die jüngste von Heinz und Mark [16] hier zitiert wird, da sie auch den Einfluss der Umfangsspannungen auf das Gleichgewicht am verformten System berücksichtigt.

In der nachfolgenden Darstellung werden nur die Verformungen und Terme betrachtet, die einen Anteil nach 2. Ordnung liefern, die anderen Ausdrücke sind bereits in den Kapiteln 3 und 4 hergeleitet. Durch die Theorie 2. Ordnung ergibt sich eine Verkopplung der nach Theorie 1. Ordnung vollkommen unabhängigen Platten- und Scheibenanteile.

### 6.1 Die kinematischen Dehnungen

Erfährt ein Plattenelement eine Verformung aus seiner Ebene heraus, so entstehen neben den Plattenverformungen Verschiebungskomponenten in Richtung der unverformten Scheibenmittellinie Abbildung 6.1. Diese kinematischen Dehnungen lassen sich über die geometrische Beziehung

$$du_{Kin} = (1 - \cos f') dx \quad (6.1)$$

ausdrücken. Ersetzen der Winkelfunktion durch die Reihe und Abbruch nach dem quadratischen Glied führt zu

$$du_{Kin} = \frac{f'^2}{2} dx. \quad (6.2)$$

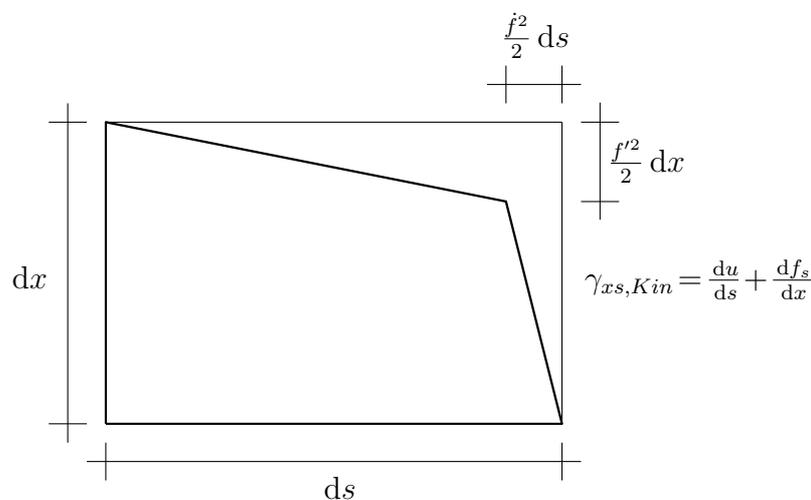


Abbildung 6.1: Kinematische Verzerrungen infolge Plattenverformungen

## 6 Die Querschnittswerte Theorie 2. Ordnung

Ebenso gilt für die  $s$ -Richtung

$$df_{s,Kin} = \frac{\dot{f}^2}{2} ds. \quad (6.3)$$

Der Vektor der kinematischen Dehnungen ist somit

$$\underline{\varepsilon}_{Kin} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,Kin}^M \\ \varepsilon_{s,Kin}^M \\ \gamma_{xs,Kin}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(f'^2 + f_s'^2) \\ \frac{1}{2}(\dot{u}^2 + \dot{f}^2) \\ \dot{f} \cdot f' \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Unter Vernachlässigung der  $\dot{u}$  die bei längs abtragenden Systemen von höherer Größenordnung klein sind wird die Variation für den Zustand  $k$  an den Verformungen  $j$  gebildet.

$$\delta^{kj} \underline{\varepsilon}_{Kin} = \begin{pmatrix} \delta^{kj} \varepsilon_{x,Kin}^M \\ \delta^{kj} \varepsilon_{s,Kin}^M \\ \delta^{kj} \gamma_{xs,Kin}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j f' \delta^k f' + j f_s' \delta^k f_s' \\ j \dot{f} \delta^k \dot{f} \\ j \dot{f} \delta^k f' + j f' \delta^k \dot{f} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Da das Einsetzen der Verschiebungsverläufe aus Kapitel 4 zu sehr komplexen Ausdrücken führt, wird zunächst darauf verzichtet.

## 6.2 Die Arbeiten an den kinematischen Dehnungen

Die Arbeiten der Membranspannungen an den kinematischen Dehnungen werden der Übersicht halber wiederum nur an einer Querschnittsscheibe dargestellt. Mit dem Spannungsvektor für den Zustand  $i$

$$\underline{\sigma}^M = \begin{pmatrix} i \sigma_x^M \\ i \sigma_s^M \\ i \tau_{xs}^M \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

ergeben sich die Arbeiten an den kinematischen Dehnungen zu

$$\delta^{kj} i \mathcal{W} = \int_V \delta^{kj} \underline{\varepsilon}_{Kin}^M \cdot \underline{\sigma}^M dV \quad (6.7)$$

$$= \int_V \left( \delta^{kj} \varepsilon_{x,Kin}^M i \sigma_x^M + \delta^{kj} \varepsilon_{s,Kin}^M i \sigma_s^M + \delta^{kj} \gamma_{xs,Kin}^M i \tau_{xs}^M \right) dV \quad (6.8)$$

Die Auswertung des Integrals wird für die einzelnen Terme getrennt vorgenommen. Dabei kommen aus den Scheibenverschiebungen in Gleichung (3.7) nur die Verläufe zu  $f_{s,0}$  zum Ansatz, da die Anteile aus  $f_{s,2}$  von höherer Größenordnung klein sind und im Mittel über die Scheibenbreite verschwinden. Die Plattenverschiebungen stammen aus den Gleichungen (4.4) bis (4.6). Auf der Spannungsseite werden die Spannungskomponenten  $\sigma_x^M$  und  $\sigma_s^M$  aus Gleichung (3.13) sowie  $\tau_{xs}^M$  aus Gleichung (5.44) herangezogen. D.h. die Längs- und Schubspannungsverläufe werden möglichst exakt erfasst, die Umfangsspannungen werden mit ihrem Mittelwert über die Scheibenbreite angenähert.

### ... aus den Längsspannungen

$$\int_V \delta^{kj} \varepsilon_{x,Kin}^M i \sigma_x^M dV = \frac{E}{1 - \mu^2} \int_V \left( j f_{s,0}^k f_{s,0}^{jV'} \delta^k V' + j f^k f^{jV'} \delta^k V' \right) \cdot \left( \mu i \dot{f}_{s,0}^i V + (i u + \mu i \dot{f}_{s,2}^i) i V'' \right) dV \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_l \delta^{kV'} \frac{E}{1-\mu^2} \left( \int_A (j f_{s,0}{}^k f_{s,0} + j f^k f) \mu \dot{f}_{s,0} dA^{jV' iV} \right. \\
 &\quad \left. + \int_A (j f_{s,0}{}^k f_{s,0} + j f^k f) (i u + \mu \dot{f}_{s,2}) dA^{jV' iV''} \right) dx \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

... aus den Umfangsspannungen

$$\int_V \delta^{kj} \varepsilon_{s,Kin}^M i \sigma_s^M dV = \frac{E}{1-\mu^2} \int_V j \dot{f}^k \dot{f}^j j V \delta^{kV} (i \dot{f}_{s,0} i V + (\mu i u + i \dot{f}_{s,2}) i V'') dV \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_l \delta^{kV} \frac{E}{1-\mu^2} \left( \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j \mu \dot{f}_{s,0} dA^{jV iV} \right. \\
 &\quad \left. + \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j (i u + \mu \dot{f}_{s,2}) dA^{jV iV''} \right) dx \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

... aus den Schubspannungen

$$\int_V \delta^{kj} \gamma_{xs,Kin}^M i \tau_{xs}^M dV = \int_V (j \dot{f}^k \dot{f}^j j V \delta^{kV'} + j \dot{f}^k \dot{f}^j j V' \delta^{kV}) (i \tau_1 i V' + i \tau_2 i W') dV \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_l \left( \delta^{kV'} \left( \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j i \tau_1 dA^{jV iV'} + \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j i \tau_2 dA^{jV iW'} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \delta^{kV} \left( \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j i \tau_1 dA^{jV' iV'} + \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j i \tau_2 dA^{jV' iW'} \right) \right) dx \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

## 6.3 Die Definition der Kappa-Werte

In den zuvor dargestellten Arbeitsausdrücken sind Anteile zu erkennen, die ausschließlich querschnittsabhängig sind. Für sie werden nachfolgende Abkürzungen eingeführt.

$${}^{kj} K_{\sigma,s} = \frac{E}{1-\mu^2} \int_A (j f_{s,0}{}^k f_{s,0} + j f^k f) \mu \dot{f}_{s,0} dA \quad (6.15)$$

$${}^{kj} K_{\sigma,x} = \frac{-1}{iC} \frac{1}{1-\mu^2} \int_A (j f_{s,0}{}^k f_{s,0} + j f^k f) (i u + \mu \dot{f}_{s,2}) dA \quad (6.16)$$

$${}^{kj} K_{\sigma_s,s} = \frac{E}{1-\mu^2} \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j \dot{f}_{s,0} dA \quad (6.17)$$

$${}^{kj} K_{\sigma_s,x} = \frac{-1}{iC} \frac{1}{1-\mu^2} \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j (\mu i u + i \dot{f}_{s,2}) dA \quad (6.18)$$

$${}^{kj} K_{\tau,e} = \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j i \tau_1 dA \quad (6.19)$$

$${}^{kj} K_{\tau,g} = \int_A j \dot{f}^k \dot{f}^j i \tau_2 dA \quad (6.20)$$

Die hierbei verwendete, untere Indizierung bei den  $K_{\sigma}$ - und  $K_{\sigma_s}$ -Werten zeigt die Dehnungsrichtungen an, aus denen die Spannungen erzeugt werden. Bei den  $K_{\tau}$ -Werten geben die Indizes Auskunft darüber, ob die Anteile aus den elastischen Schubspannungen oder den Gleichgewichtsschubspannungen stammen. Die  $K_{\sigma_s}$ -Terme sind *hier* nur bei der

Auswahl der Umfangsdehnungen definiert, sie verschwinden wenn dieser Verformungsfreiheitsgrad nicht ausgewählt wird. An ihre Stelle treten Umfangsspannungen, die analog zu den Schubspannungen aus Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden müssten. Die  $K_\sigma$ -Anteile reduzieren sich in diesem Fall auf die  $K_{\sigma,x}$ . Die  $K_\tau$ -Anteile erscheinen immer dann mit beiden Anteilen, wenn elastische Schubverformungen entweder bei Auswahl der Scheibenschubfreiheitsgrade oder durch geschlossene Zellen vorliegen. Ansonsten entfallen die  $K_{\tau,e}$ -Werte. Die Auswertung der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Querschnittsintegrale und die dabei zu beachtenden Besonderheiten bei der Auswahl der Verformungsfreiheitsgrade sind im Kapitel 9.2 zusammengestellt.

## 6.4 Die Anteile der Theorie 2. Ordnung in der Differentialgleichung

Werden die Kappa-Terme in die Bestimmungsgleichungen der Arbeiten eingesetzt und aufsummiert, so erhält man daraus

$$\begin{aligned} \delta^{kji} \mathcal{W}^{II} = & \int_l \delta^{kV'} \left( {}^{kji}K_{\sigma,s} {}^jV' {}^iV + {}^{kji}K_{\sigma,x} {}^jV' {}^iW \right. \\ & \left. + {}^{kji}K_{\tau,e} {}^jV {}^iV' + {}^{kji}K_{\tau,g} {}^jV {}^iW' \right) \\ & + \delta^{kV} \left( {}^{jki}K_{\tau,e} {}^jV' {}^iV' + {}^{jki}K_{\tau,g} {}^jV' {}^iW' \right. \\ & \left. + {}^{kji}K_{\sigma,s} {}^jV {}^iV + {}^{kji}K_{\sigma,x} {}^jV {}^iW \right) dx \end{aligned} \quad (6.21)$$

und nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \delta^{kji} \mathcal{W}^{II} = & \int_l \left( - {}^{kji}K_{\sigma,s} \left( {}^iV {}^jV' \right)' - {}^{kji}K_{\sigma,x} \left( {}^iW {}^jV' \right)' \right. \\ & \left. - {}^{kji}K_{\tau,e} \left( {}^iV' {}^jV \right)' - {}^{kji}K_{\tau,g} \left( {}^iW' {}^jV \right)' \right. \\ & \left. + {}^{jki}K_{\tau,e} {}^iV' {}^jV' + {}^{jki}K_{\tau,g} {}^iW' {}^jV' \right. \\ & \left. + {}^{kji}K_{\sigma,s} {}^iV {}^jV + {}^{kji}K_{\sigma,x} {}^iW {}^jV \right) \delta^{kV} dx \\ & + \left[ \left( {}^{kji}K_{\sigma,s} {}^iV {}^jV' + {}^{kji}K_{\sigma,x} {}^iW {}^jV' \right. \right. \\ & \left. \left. + {}^{kji}K_{\tau,e} {}^iV' {}^jV + {}^{kji}K_{\tau,g} {}^iW' {}^jV \right) \delta^{kV} \right]_0^l \end{aligned} \quad (6.22)$$

die Zusatzterme 2. Ordnung für das homogene Differentialgleichungssystem mit den Ergänzungen für die Randterme.

# 7 Die Lösungen des Differentialgleichungssystems

Für die Lösungen des Differentialgleichungssystems wird ein Reihenansatz der Form

$$f(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + \dots + a_n\xi^n \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{x}{\ell} \quad (7.1)$$

gewählt. Dieses Verfahren hat die angenehme Eigenschaft, dass es, vorausgesetzt die Reihe konvergiert, einerseits den Verlauf der Lösungsfunktion numerisch exakt beschreibt, andererseits ein einfaches, einheitliches Vorgehen ohne Fallunterscheidungen zulässt. In diesem Zusammenhang sei auf die Literatur [4, 34, 24] verwiesen, um nur einige zu nennen.

Um einige Vorteile dieses Verfahrens gegenüber der geschlossenen Lösung, die Hanf in [11] dargestellt hat, herauszuheben, sei folgendes bemerkt:

- Der Reihenansatz bietet die Möglichkeit, die variablen Koeffizienten bei den ungeraden Ableitungen zu behandeln, die sich bei der Anwendung der Theorie 2. Ordnung ergeben.
- Das Verfahren bietet einen einheitlichen Algorithmus bei allen Lösungsfunktionen; Fallunterscheidungen sind nicht vonnöten.
- Es werden nur die vier Grundrechenarten benötigt. Der Rechenaufwand ist relativ gering.
- Die Reihen und damit auch die Lösungsfunktionen konvergieren üblicherweise sehr schnell.

Dies legt den Schluss nahe, dass sich der Reihenansatz besonders gut zur Programmierung eignet, was sich bei der Anwendung dieses Verfahrens in [13] und [10] bestätigt hat.

Zur Abgrenzung gegenüber dem Differenzenverfahren ist zu bemerken:

- Das Differenzenverfahren führt im Falle der Verzweigungsberechnung auf ein lineares Matrizeigenwertproblem, beim Reihenansatz erhält man stattdessen das nur iterativ zu lösende, transzendente Eigenwertproblem.
- Der Speicherplatzbedarf ist üblicherweise ebenso gering wie bei der zuvor zitierten geschlossenen Lösung. Für die meisten Probleme kann eine PC-Fassung des Programms verwendet werden.
- Die Rechenzeiten sind für die Mehrzahl der Probleme ebenfalls sehr gering; sie liegen in der Größenordnung der geschlossenen Lösung.

## 7 Die Lösungen des Differentialgleichungssystems

- Die Formulierung der Randbedingungen, die bei der Verwendung der Freiheitsgrade Schubverformung und Umfangsdehnung diskret erfolgen muss, ist wesentlich einfacher zu behandeln.

Dies alles macht den Reihenansatz zu einem für die VTB in hohem Maße geeigneten Lösungsverfahren.

Liegt nun ein System von  $m$  (ausgewählten) Differentialgleichungen vor, so wird für jeden Zustand der Verformungsansatz nach Gleichung (7.1) gewählt. Aus der einzelnen Gleichung wird

$$\underbrace{\begin{pmatrix} {}^1V_h \\ {}^2V_h \\ {}^3V_h \\ \vdots \\ {}^mV_h \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}_h} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \xi^4 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}}. \quad (7.2)$$

Da zu einer Differentialgleichung 4. Ordnung ebenso viele freie Konstanten gehören, wurde die Grenze zwischen den freien und abhängigen Konstanten durch die vertikale Linie hervorgehoben. Sind die Anfangswerte der Verformungsfunktionen und ihrer Ableitungen bekannt, so lassen sich die freien Koeffizienten unmittelbar berechnen, ansonsten genügt es,  $4m$  linear unabhängige Belegungsmuster vorzugeben, die jeweils mit einer noch unbekannt Amplitude zu versehen sind, um das Randwertproblem zu lösen.

Fasst man jetzt noch die Spalten in der Koeffizientenmatrix der Gleichung (7.2) zu Vektoren zusammen, dann stellt sich der Ansatz wesentlich übersichtlicher mit seinen Ableitungen dar als

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{V}' &= \frac{1}{l} \begin{pmatrix} 1\mathbf{a}_1 & 2\mathbf{a}_2 & 3\mathbf{a}_3 & 4\mathbf{a}_4 & \dots & n\mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{V}'' &= \frac{1}{l^2} \begin{pmatrix} \frac{2!}{0!}\mathbf{a}_2 & \frac{3!}{1!}\mathbf{a}_3 & \frac{4!}{2!}\mathbf{a}_4 & \dots & \frac{n!}{(n-2)!}\mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{V}''' &= \frac{1}{l^3} \begin{pmatrix} \frac{3!}{0!}\mathbf{a}_3 & \frac{4!}{1!}\mathbf{a}_4 & \dots & \frac{n!}{(n-3)!}\mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{V}'''' &= \frac{1}{l^4} \begin{pmatrix} \frac{4!}{0!}\mathbf{a}_4 & \dots & \frac{n!}{(n-4)!}\mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (7.3)$$

der als Ausgangspunkt für die Lösungen herangezogen wird.

## 7.1 Die homogene Lösung

### 7.1.1 ...nach Theorie 1. Ordnung

Das zu lösende homogene Differentialgleichungssystem 4. Ordnung, das in Kapitel 5 beschrieben wurde, ist von der Form

$$E^k C^k V_h'''' - G \sum_j^{nz} k^j D^j V_h'' + \sum_j^{nz} k^j B^j V_h = 0 \quad \forall k = 1, nz. \quad (7.4)$$

Der Doppelindex bei  ${}^{kj}B$  kann bei anderer Form der Orthogonalisierung auftreten und wird deshalb der Vollständigkeit halber mit angegeben.

Durch Einsetzen des Verformungsansatzes Gleichung (7.3) in die homogene Differentialgleichung (7.4) und Darstellung der Steifigkeiten in Matrizenform erhält man

$$\begin{aligned} & \mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \Xi \\ - \frac{1}{l^2} G \mathbf{D} & \begin{pmatrix} \frac{2!}{0!} \mathbf{a}_2 & \frac{3!}{1!} \mathbf{a}_3 & \frac{4!}{2!} \mathbf{a}_4 & \dots & \frac{n!}{(n-2)!} \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \Xi \\ + \frac{1}{l^4} E \mathbf{C} & \begin{pmatrix} \frac{4!}{0!} \mathbf{a}_4 & \dots & \frac{n!}{(n-4)!} \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \Xi = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

und kann nunmehr die Koeffizientenvektoren  $\mathbf{a}_j$  für  $j > 3$  über die Rekursionsformel

$$\mathbf{a}_j = \frac{(j-4)!}{j!} \cdot \frac{l^4}{E} \mathbf{C}^{-1} \left( \frac{(j-2)!}{(j-4)!} \cdot \frac{G}{l^2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_{j-2} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_{j-4} \right) \quad (7.6)$$

berechnen, die sich aus dem Koeffizientenvergleich ergibt. Aus der Multiplikation des Klammerausdruckes mit  $\mathbf{C}^{-1}$  ist ersichtlich, dass Gleichung (7.6) nur dann gilt, wenn  $\mathbf{C}$  nichtsingulär ist.

### 7.1.2 ... nach Theorie 2. Ordnung

Um die Einflüsse aus der Theorie 2. Ordnung zu berücksichtigen, muss die homogene Differentialgleichung (7.4) um die in Kapitel 6, Gleichung (6.22) nachgetragenen Arbeitsausdrücke ergänzt werden. Die vollständige Differentialgleichung lautet dann:

$$\begin{aligned} 0 &= E^k C^k V_h'''' - G \sum_j^{nz} {}^{kj} D^j V_h'' + \sum_j^{nz} {}^{kj} B^j V_h \\ &+ \sum_j^{nz} \sum_i^{nz} \left( \begin{aligned} & - {}^{kji} K_{\sigma,s} {}^i V^j V_h'' - {}^{kji} K_{\sigma,x} {}^i W^j V_h'' - {}^{kji} K_{\sigma,s} {}^i V'^j V_h' - {}^{kji} K_{\sigma,x} {}^i W'^j V_h' \\ & - {}^{kji} K_{\tau,e} {}^i V'^j V_h' - {}^{kji} K_{\tau,g} {}^i W'^j V_h' + {}^{jki} K_{\tau,e} {}^i V'^j V_h' + {}^{jki} K_{\tau,g} {}^i W'^j V_h' \\ & - {}^{kji} K_{\tau,e} {}^i V''^j V_h - {}^{kji} K_{\tau,g} {}^i W''^j V_h + {}^{kji} K_{\sigma,s} {}^i V^j V_h + {}^{kji} K_{\sigma,x} {}^i W^j V_h \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Diese Differentialgleichung ist wegen der Produkte aus Schnittgrößen und Verformungen nicht mehr linear und daher auch nicht mehr geschlossen lösbar. Üblicherweise wird das Problem dadurch umgangen, dass dafür die Ergebnisse aus der Berechnung nach Theorie 1. Ordnung eingesetzt werden. Diese Vorgehensweise wird auch hier angewandt. Da das aus der Theorie 1. Ordnung stammende Polynom allerdings bis zum Grad 100 werden kann, würde der Rechenaufwand sehr groß.

Um diesen Aufwand zu verringern, wird der tatsächliche Verformungsverlauf durch ein Polynom niedriger Ordnung angenähert. Die Annäherung wird für die Verformungsfunktion durchgeführt, da in der Gleichung (7.7) neben den Schnittgrößen im Zustand  $i$  auch Verformungen auftreten wenn Umfangsdehnungen berücksichtigt werden. Ohne die Funktionen  ${}^i V$  und  ${}^i V'$  wäre es günstiger, den Verlauf der Schnittgrößen zu approximieren. Dieser Effekt kann allerdings auch erreicht werden, wenn man die Länge des Approximationspolynoms vergrößert.

Die Annäherung der Verformungsfunktionen wird so gewählt, dass die dabei auftretenden Integrale über das Fehlerquadrat zwischen Lösung und Näherung zu Minima werden [18]. Es zeigt sich, dass der Grad des Approximationspolynoms wesentlich geringer

## 7 Die Lösungen des Differentialgleichungssystems

sein kann. Gute Lösungen gibt es schon wenn der Grad der Approximation bei 5 bis 6 liegt.

Das Näherungspolynom  $\mathbf{V}_A$  entspricht dem aus Gleichung (7.2), der Grad wird jedoch auf  $n_A$  begrenzt.

$$\begin{pmatrix} {}^1V_A \\ {}^2V_A \\ {}^3V_A \\ \vdots \\ {}^mV_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \dots & b_{1n_A} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \dots & b_{2n_A} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \dots & b_{3n_A} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m0} & b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & \dots & b_{mn_A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \xi^4 \\ \vdots \\ \xi^{n_A} \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Das Fehlerquadrat zwischen der Verformungsfunktion  ${}^jV$  und ihrer Annäherung, das ist das Integral über das Quadrat der Differenzen zwischen Lösung und Näherung,

$${}^j\Delta^2 = \int_l ({}^jV(\xi) - {}^jV_A(\xi))^2 d\xi \quad (7.9)$$

wird immer dann zu einem Minimum, wenn die Ableitung der Approximation nach ihren Koeffizienten  $b_{jp}$  verschwindet.

$$\frac{d{}^j\Delta^2}{db_{jp}} = 0 \quad \forall p = 0 \dots n_A. \quad (7.10)$$

Da die Integration und die anschließende Differentiation voneinander unabhängig sind, kann die Reihenfolge vertauscht werden. Nach Anwendung der Kettenregel und Division durch 2 ergibt sich

$$\int_l {}^jV_A(\xi)\xi^p d\xi = \int_l {}^jV(\xi)\xi^p d\xi \quad (7.11)$$

$$\sum_{q=0}^{n_A} b_{jq} \int_l \xi^q \xi^p d\xi = \sum_{r=0}^n a_{jr} \int_l \xi^r \xi^p d\xi \quad (7.12)$$

$$\sum_{q=0}^{n_A} b_{jq} \left[ \frac{\xi^{q+p+1}}{(q+p+1)} \right]_l = \sum_{r=0}^n a_{jr} \left[ \frac{\xi^{r+p+1}}{(r+p+1)} \right]_l. \quad (7.13)$$

Die Auswertung der Integrale für alle  $p$  führt auf der linken Seite zu einer Matrix, die für alle Verformungszustände  $j$  gleich ist, auf der rechten Seite der Gleichung erhält man die dazugehörigen rechten Seiten des Gleichungssystems zur Bestimmung der Koeffizienten  $b_{jq}$ . Berücksichtigt man jetzt noch den Umstand, dass bei der internen Behandlung der Koordinatenursprung in der Mitte des Integrationsabschnittes liegt und die bezogene Stablänge 2 beträgt, so wird offensichtlich für gerade Exponenten  $q+p+1$  bzw.  $r+p+1$  der Integrand zu Null.

Werden die Schnittgrößen der Näherung noch durch die Ableitungen der Verformungen ausgedrückt

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_A &= -EC\mathbf{V}_A'' \\ \mathbf{W}'_A &= -EC\mathbf{V}_A''' \\ \mathbf{W}''_A &= -EC\mathbf{V}_A'''' \end{aligned} \quad (7.14)$$

und auch noch folgende Abkürzungen für eine kompaktere Darstellung eingeführt, wobei die Approximationen *immer* zu den Verformungen oder Schnittgrößen mit dem Index  $i$  gehören und  $[u]$  und  $[t]$  die Ableitungsstufen wiedergeben,

$$\mathbf{K}\mathbf{V}^{[t]}\mathbf{V}^{[u]} = \sum_j^{n_Z} \sum_i^{n_Z} k_{ji} \mathbf{K}^i \mathbf{V}^{[t]j} \mathbf{V}^{[u]} \quad (7.15)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{W}^{[t]}\mathbf{V}^{[u]} = \sum_j^{n_Z} \sum_i^{n_Z} k_{ji} \mathbf{K}^i \mathbf{C}^i \mathbf{W}^{[t]j} \mathbf{V}^{[u]} \quad (7.16)$$

$${}^{jki}\mathbf{K} = {}^{kji}\mathbf{K}^T, \quad (7.17)$$

so erhält man nach Einsetzen in Gleichung (7.7) die kompakte Darstellung der Differentialgleichung mit den Verformungsfunktionen der Approximation und deren Ableitungen:

$$\begin{aligned} 0 &= E\mathbf{C}\mathbf{V}_h'''' - G\mathbf{D}\mathbf{V}_h'' + \mathbf{B}\mathbf{V}_h \\ &+ (E\mathbf{K}_{\sigma,x}\mathbf{C}\mathbf{V}_A'' - \mathbf{K}_{\sigma,s}\mathbf{V}_A)\mathbf{V}_h'' \\ &+ \left( E(\mathbf{K}_{\sigma,x} + \mathbf{K}_{\tau,g} - \mathbf{K}_{\tau,g}^T)\mathbf{C}\mathbf{V}_A''' - (\mathbf{K}_{\sigma,s} + \mathbf{K}_{\tau,e} - \mathbf{K}_{\tau,e}^T)\mathbf{V}_A' \right)\mathbf{V}_h' \\ &+ \left( E\mathbf{K}_{\tau,g}\mathbf{C}\mathbf{V}_A'''' - (\mathbf{K}_{\tau,e} + E\mathbf{K}_{\sigma,s,x}\mathbf{C})\mathbf{V}_A'' + \mathbf{K}_{\sigma,s,s}\mathbf{V}_A \right)\mathbf{V}_h. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Um die Rekursionsformel nach Theorie 2. Ordnung herzuleiten sind noch ein paar Schritte erforderlich. Zunächst werden die Approximationen und ihre Ableitungen durch die Summen ihrer Reihenglieder ersetzt:

$$\begin{aligned} 0 &= E\mathbf{C}\mathbf{V}_h'''' \\ &+ \left( -GD + E\mathbf{K}_{\sigma,x}\mathbf{C} \sum_{q=0}^{n_A-2} \frac{(q+2)!}{q!\ell^2} \mathbf{b}_{q+2}\xi^q - \mathbf{K}_{\sigma,s} \sum_{q=0}^{n_A} \mathbf{b}_q \xi^q \right) \mathbf{V}_h'' \\ &+ \left( E(\mathbf{K}_{\sigma,x} + \mathbf{K}_{\tau,g} - \mathbf{K}_{\tau,g}^T)\mathbf{C} \sum_{q=0}^{n_A-3} \frac{(q+3)!}{q!\ell^3} \mathbf{b}_{q+3}\xi^q - (\mathbf{K}_{\sigma,s} + \mathbf{K}_{\tau,e} - \mathbf{K}_{\tau,e}^T) \sum_{q=0}^{n_A-1} \frac{(q+1)!}{q!\ell} \mathbf{b}_{q+1}\xi^q \right) \mathbf{V}_h' \\ &+ \left( \mathbf{B} + E\mathbf{K}_{\tau,g}^T\mathbf{C} \sum_{q=0}^{n_A-4} \frac{(q+4)!}{q!\ell^4} \mathbf{b}_{q+4}\xi^q - (\mathbf{K}_{\tau,e}^T + E\mathbf{K}_{\sigma,s,x}\mathbf{C}) \sum_{q=0}^{n_A-2} \frac{(q+2)!}{q!\ell^2} \mathbf{b}_{q+2}\xi^q + \mathbf{K}_{\sigma,s,s} \sum_{q=0}^{n_A} \mathbf{b}_q \xi^q \right) \mathbf{V}_h. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Um die weitere Herleitung der Rekursionsformel etwas übersichtlicher zu gestalten, werden innerhalb der großen Klammern die Koeffizienten zu  $\xi^q$  in Matrizen  $\mathbf{A}_{e,q}$  mit  $e = 4, 2, 1, 0$  zusammengefasst. Bei den geraden Ableitungsstufen  $e$  zu  $\mathbf{V}_h$  sind die Terme nach Theorie 1. Ordnung zu berücksichtigen. Der Koeffizientenvektor  $\mathbf{b}_q$  ist für  $q > n_A$  der Nullvektor.

## 7 Die Lösungen des Differentialgleichungssystems

Dann gilt mit  $q > 0$ :

$$\mathbf{A}_{4,0} = EC \quad (7.20)$$

$$\mathbf{A}_{2,0} = \frac{2!}{0! \cdot \ell^2} EK_{\sigma,x} \mathbf{C} \mathbf{b}_2 - \mathbf{K}_{\sigma,s} \mathbf{b}_0 - GD$$

$$\mathbf{A}_{2,q} = \frac{(q+2)!}{q! \cdot \ell^2} EK_{\sigma,x} \mathbf{C} \mathbf{b}_{q+2} - \mathbf{K}_{\sigma,s} \mathbf{b}_q \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1,q} &= \frac{(q+3)!}{q! \cdot \ell^3} E (\mathbf{K}_{\sigma,x} + \mathbf{K}_{\tau,g} - \mathbf{K}_{\tau,g}^T) \mathbf{C} \mathbf{b}_{q+3} \\ &- \frac{(q+1)!}{q! \cdot \ell} (\mathbf{K}_{\sigma,s} + \mathbf{K}_{\tau,e} - \mathbf{K}_{\tau,e}^T) \mathbf{b}_{q+1} \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\mathbf{A}_{0,0} = \frac{4!}{0! \cdot \ell^4} EK_{\tau,g}^T \mathbf{C} \mathbf{b}_4 - \frac{2!}{0! \cdot \ell^2} (\mathbf{K}_{\tau,e}^T + EK_{\sigma,s,x} \mathbf{C}) \mathbf{b}_2 + \mathbf{K}_{\sigma,s} \mathbf{b}_0 + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A}_{0,q} = \frac{(q+4)!}{q! \cdot \ell^4} EK_{\tau,g}^T \mathbf{C} \mathbf{b}_{q+4} - \frac{(q+2)!}{q! \cdot \ell^2} (\mathbf{K}_{\tau,e}^T + EK_{\sigma,s,x} \mathbf{C}) \mathbf{b}_{q+2} + \mathbf{K}_{\sigma,s} \mathbf{b}_q. \quad (7.23)$$

Mit diesen neu eingeführten Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}$  lässt sich das Differentialgleichungssystem weitaus übersichtlicher darstellen, wenngleich der mechanische Hintergrund dadurch weniger deutlich sichtbar wird:

$$0 = \mathbf{A}_{4,0} \mathbf{V}_h'''' + \sum_{q=0}^{n_A} \mathbf{A}_{2,q} \xi^q \mathbf{V}_h'' + \sum_{q=0}^{n_A-1} \mathbf{A}_{1,q} \xi^q \mathbf{V}_h' + \sum_{q=0}^{n_A} \mathbf{A}_{0,q} \xi^q \mathbf{V}_h \quad (7.24)$$

Werden jetzt noch die Verformungsfunktionen durch die Summen ihrer Reihenglieder ersetzt, und außerdem die Summen ausmultipliziert und die Variablen  $\xi$  in die Klammern hineinmultipliziert, so erhält man für die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\ell^4} \mathbf{A}_{4,0} \left( \begin{array}{cccccc} \frac{4!}{0!} \mathbf{a}_4 & \dots & \frac{n!}{(n-4)!} \mathbf{a}_n & & & \end{array} \right) \Xi + \\ &\frac{1}{\ell^2} \left( \begin{array}{l} \mathbf{A}_{2,0} \left( \begin{array}{cccccc} \frac{2!}{0!} \mathbf{a}_2 & \frac{3!}{1!} \mathbf{a}_3 & \frac{4!}{2!} \mathbf{a}_4 & \dots & \frac{n!}{(n-2)!} \mathbf{a}_n & \end{array} \right) \Xi + \\ \mathbf{A}_{2,1} \left( \begin{array}{cccccc} & \frac{2!}{0!} \mathbf{a}_2 & \frac{3!}{1!} \mathbf{a}_3 & \frac{4!}{2!} \mathbf{a}_4 & \dots & \frac{n!}{(n-2)!} \mathbf{a}_n \end{array} \right) \Xi + \\ \mathbf{A}_{2,2} \left( \begin{array}{cccccc} & & \frac{2!}{0!} \mathbf{a}_2 & \frac{3!}{1!} \mathbf{a}_3 & \frac{4!}{2!} \mathbf{a}_4 & \dots & \frac{n!}{(n-2)!} \mathbf{a}_n \end{array} \right) \Xi \dots \end{array} \right) + \\ &\frac{1}{\ell} \left( \begin{array}{l} \mathbf{A}_{1,0} \left( \begin{array}{cccccc} 1 \mathbf{a}_1 & 2 \mathbf{a}_2 & 3 \mathbf{a}_3 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \mathbf{a}_{n-1} & \frac{n!}{(n-1)!} \mathbf{a}_n \end{array} \right) \Xi + \\ \mathbf{A}_{1,1} \left( \begin{array}{cccccc} & 1 \mathbf{a}_1 & 2 \mathbf{a}_2 & 3 \mathbf{a}_3 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \mathbf{a}_{n-1} & \frac{n!}{(n-1)!} \mathbf{a}_n \end{array} \right) \Xi + \\ \mathbf{A}_{1,2} \left( \begin{array}{cccccc} & & 1 \mathbf{a}_1 & 2 \mathbf{a}_2 & 3 \mathbf{a}_3 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \mathbf{a}_{n-1} \end{array} \right) \Xi \dots \end{array} \right) + \\ &\left( \begin{array}{l} \mathbf{A}_{0,0} \left( \begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_{n-2} & \mathbf{a}_{n-1} & \mathbf{a}_n \end{array} \right) \Xi + \\ \mathbf{A}_{0,1} \left( \begin{array}{cccccc} & \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_{n-2} & \mathbf{a}_{n-1} \end{array} \right) \Xi + \\ \mathbf{A}_{0,2} \left( \begin{array}{cccccc} & & \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_{n-2} \end{array} \right) \Xi \dots \end{array} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

und daraus aus dem Koeffizientenvergleich die Rekursionsformel für die homogene Diffe-

rentialgleichung nach Theorie 2. Ordnung.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j = -\frac{(j-4)!}{j!} \ell^4 \mathbf{A}_{4,0}^{-1} & \left( \frac{1}{\ell^2} \sum_{p=0}^{j-4} \frac{(j-2-p)!}{(j-4-p)!} \mathbf{A}_{2,p} \cdot \mathbf{a}_{j-2-p} \right. \\ & + \frac{1}{\ell} \sum_{p=0}^{j-4} \frac{(j-3-p)!}{(j-4-p)!} \mathbf{A}_{1,p} \cdot \mathbf{a}_{j-3-p} \\ & \left. + \sum_{p=0}^{j-4} \mathbf{A}_{0,p} \cdot \mathbf{a}_{j-4-p} \right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Am Umfang dieser Bestimmungsgleichung ist ersichtlich, dass der Rechenaufwand nach Theorie 2. Ordnung etwa mit dem Faktor  $(n_A + 1)$  anwächst. Hier wurde bereits durch das Zusammenfassen der Koeffizientenmatrizen mit gleichen  $\xi^p$  eine wesentliche Vereinfachung und Reduzierung des Rechenaufwands erzielt.

## 7.2 Die Partikularlösung

Für die Partikularlösung wird, wie eingangs angedeutet, im Rahmen dieser Arbeit die Einschränkung gemacht, dass als Belastungsglieder immer nur Polynome zugelassen werden. Sie genügen, fast jede erdenkliche Streckenlast darzustellen (jede hinreichend oft differenzierbare Funktion lässt sich in eine Taylorreihe entwickeln) und sind vom gleichen Typ wie die homogene Lösung, was eine einheitliche Handhabung zulässt.

Es sei nun die verteilte Belastung in Form des Polynoms

$$\mathbf{q}(\xi) = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 \xi^1 + \mathbf{q}_2 \xi^2 \dots, \quad (7.27)$$

gegeben, das sich bereits über alle ausgewählten Zustände erstreckt. Die Partikularlösung muss für sich alleine die Randbedingungen nicht einhalten; deshalb können die freien Konstanten entfallen bzw. beliebige Werte annehmen. Da die Lösung der Differentialgleichung gleichzeitig vom Typ der rechten Seite ist, lassen sich die um die Partikularterme ergänzten Rekursionsformeln sofort anschreiben, indem man sie um den Term  $+\mathbf{q}_{j-4}$  ergänzt. Nach Theorie 1. Ordnung erhält man

$$\mathbf{a}_j = \frac{(j-4)!}{j!} \cdot \frac{\ell^4}{E} \mathbf{C}^{-1} \left( \frac{(j-2)!}{(j-4)!} \cdot \frac{G}{\ell^2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_{j-2} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_{j-4} + \mathbf{q}_{j-4} \right), \quad (7.28)$$

auf die Darstellung nach Theorie 2. Ordnung wird wegen der eindeutigen Analogie verzichtet.

Damit unterscheidet sich die Partikularlösung von der homogenen nur durch die zusätzlichen Terme aus den rechten Seiten und es kann grundsätzlich, wie zuvor bereits angedeutet, das gleiche Rechenschema angewendet werden, was sich besonders bei der Rückrechnung der Verformungen und Schnittgrößen günstig auswirkt.

Zuletzt sei noch eine Überlegung zu den Belastungspolynomen angestellt. Wie in Gleichung (7.12) für die Annäherung der Verformungsfunktionen dargestellt, lässt sich dieses

Verfahren auch für Belastungen anwenden, die nicht über den ganzen Integrationsabschnitt reichen. Für das Belastungspolynom  $s(\xi)$  im Definitionsbereich  $\xi_b \leq \xi \leq \xi_e$  ließe sich die Näherung  $\bar{s}(\xi)$  aus der Bedingung

$$\sum_{q=0}^{n_A} \bar{s}_{jq} \int_l \xi^q \xi^p d\xi = \sum_{r=0}^n s_{jr} \int_{\xi_b}^{\xi_e} \xi^r \xi^p d\xi \quad (7.29)$$

berechnen. Um für Trapezlasten gute Übereinstimmung zu erhalten, braucht man, je nach Lage und Länge des Belastungsbereiches sowie der Veränderlichkeit der Belastung, doch recht lange Polynome, die bei der Berechnung nach Theorie 2. Ordnung gleichzeitig die Minimallänge des Approximationspolynoms festlegen. Deshalb ist es letztendlich wirtschaftlicher, die Integrationsabschnittsgrenzen auf die Lastgrenzen abzustimmen und mit Lastgliedern geringer Ordnung zu arbeiten.

### 7.3 Die Lösung der Differentialgleichung $n$ . Ordnung im Programm

Um das zuvor beschriebene Differentialgleichungssystem mit dem Reihenansatz zu lösen, wurde ein mathematisches Unterprogramm geschrieben, das das Problem

$$\check{A}_n v^{[n]} + \check{A}_{n-1} v^{[n-1]} + \dots + \check{A}_1 v' + \check{A}_0 v = \check{q} \quad (7.30)$$

für beliebige Ordnung  $n$  der Differentialgleichung löst. Dabei sind die variablen Koeffizienten, die Lösungsfunktion und die rechte Seite vom Typ

$$\check{A}_r = \check{A}_{r,0} + \check{A}_{r,1}x + \dots + \check{A}_{r,l_r}x^{l_r}, \quad (7.31)$$

$$v = \check{a}_0 + \check{a}_1x + \check{a}_2x^2 + \check{a}_3x^3 + \check{a}_4x^4 + \dots \check{a}_n x^n, \quad (7.32)$$

$$\check{q} = \check{q}_0 + \check{q}_1x + \dots + \check{q}_{n_r}x^{n_r}, \quad (7.33)$$

$$\forall \{-1 \leq x \leq 1\}.$$

Entgegen der üblichen Gepflogenheit in der Stabstatik, das lokale Koordinatensystem am Stabanfang zu definieren, wird bei der Lösung der Differentialgleichung mit dem Reihenansatz das Koordinatensystem in der Mitte des Definitionsbereichs angenommen, der intern den Bereich  $-1 \leq x \leq 1$  umfasst, also eine absolute Stablänge von 2 aufweist. Dafür gibt es eine Reihe von Gründen:

1. Die Erweiterung der Definitionsbereichs zur linken Seite hin verbessert die Konvergenz wesentlich, weil dies mechanisch einer Halbierung der Stablänge entspricht. Bei Stäben mit sehr starker Schubsteifigkeit oder Bettung wird eine weitere Unterteilung des Gesamtstabes bei schlecht konvergierender Reihe erst viel später erforderlich.
2. Bei z. B. linear veränderlicher Biegesteifigkeit, die sich vom Stabanfang zum Stabende verdoppelt, entsteht, wenn der Definitionsbereich  $0 \leq x \leq 1$  ist, bei  $x = -1$  eine Polstelle. Bei dem hier gewählten Definitionsbereich liegt der Mittelpunkt des Konvergenzkreises in Abschnittsmitte, so dass dieses Problem nur dann entsteht, wenn die Biegesteifigkeit einen Nulldurchgang hat, was mechanisch sinnlos wäre.

### 7.3 Die Lösung der Differentialgleichung $n$ . Ordnung im Programm

3. Der Rechenaufwand ist bei der Berechnung der Randwerte nur geringfügig größer, da die Funktionswerte mit ungeradem Exponenten am linken Stabende mit negativem Vorzeichen eingehen. Demgegenüber steht die Ersparnis infolge wesentlich kürzerer Reihen, die den Mehraufwand mehr als aufwiegt.

Dies muss allerdings bei der Belegung der Koeffizientenmatrizen berücksichtigt werden. Die Umrechnung der Matrizen der Gleichungen (7.20) bis (7.23) ist allerdings denkbar einfach:

$$\check{A}_{r,q} = \mathbf{A}_{r,q} \cdot \left(\frac{2}{\ell}\right)^r. \quad (7.34)$$

Für die Belegung der Matrizen ist zu beachten, dass an Stelle der Stablänge stets die halbe Stablänge  $\ell/2$  also der Abstand vom Koordinatenursprung des Stabes zum Stabanfang bzw. -ende einzusetzen ist um die Umrechnung auf die Länge 2 zu erreichen. Demzufolge müssen die Ableitungen der Verformungen hinterher auf die tatsächliche Stablänge umgerechnet werden. Diese Vorgehensweise wurde gewählt um den mathematischen Teil der Berechnung dimensionsrein zu gestalten.

Für die Lösung stehen drei mathematische Funktionen zur Verfügung. Sie alle benötigen als Argument die Ordnung der Differentialgleichung, die eventuell vorhandenen variablen Koeffizienten(matrizen), die Anzahl der zu lösenden Differentialgleichungen sowie die zulässige Ordnung des Polynoms. Weitere Parameter sind von der Funktion abhängig.

**dnovpw\_d** Aus dem System von Differentialgleichungen wird die Matrix der Randwerte (Wronski-Matrix) in Abhängigkeit von den freien Koeffizienten berechnet. Sie beinhaltet die Funktionswerte und Ableitungen  $f^{[0]}$  bis  $f^{[n-1]}$  an beiden Stabenden.

**dnovpo\_d** Mit den bekannten freien Koeffizienten und dem Polynom der rechten Seiten wird die Lösungsfunktion entwickelt.

**dnovpp\_d** Berechnung der Partikularlösung. Die freien Koeffizienten werden Null gesetzt und der Vektor der Randschnittgrößen an beiden Stabenden wird aus dem Polynom der rechten Seite aufgestellt.

Diese drei Routinen greifen ihrerseits auf zwei lokale Funktionen zu, die zum einen die sehr häufige Rechenoperation

$$\mathbf{a} \leftarrow \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{c} \quad (7.35)$$

durchführen und zum anderen die Reihen entwickeln.

Wird die zulässige Länge des Polynoms überschritten, so wird die Reihenentwicklung abgebrochen und dieser Umstand über den Funktionswert signalisiert.

## 7.4 Betrachtungen zur Konvergenz

Es ist nunmehr von Interesse, wie weit die Reihe entwickelt werden muss und ob es Fälle gibt, bei denen keine Konvergenz vorliegt.

Die erste Frage lässt sich leicht durch die Bedingung beantworten, dass sich die Funktionswerte von  $\mathbf{V}$  bis  $\mathbf{V}^{[n-1]}$  an einer von  $x = 0$  verschiedenen Stelle nicht mehr verändern. Dies ist auf elektronischen Rechenanlagen bei doppelt genauer Zahlendarstellung dann der Fall, wenn die Veränderung des Funktionswertes kleiner ist als etwa  $10^{-16}$ . Da es nun Werte geben kann, die gegen Null gehen, ist diese Bedingung nicht mehr sinnvoll. Ebenso kann sich bei alternierenden Reihen das Ergebnis aus Differenzen großer Zahlen zusammensetzen. Um trotzdem ein hinreichendes Abbruchkriterium zu haben, braucht man nur die Zwischensummen, die bei der Addition der Reihenglieder entstehen, zu betrachten und sich die maximalen Absolutwerte der Verformungsfunktionen samt ihrer Ableitungen als Vergleichswert aufzuheben. Dadurch bekommt man zwar keine Aussage über die absolute Genauigkeit, allerdings lässt sich diese durch eine genaue Fehleranalyse ermitteln. Für die Praxis genügt es, den Vergleich bis zur  $(n-1)$ . Ableitung durchzuführen und die Ordnung der Polynome zu begrenzen.

Die zweite Frage wurde durch die Anwendung dieses Verfahrens in der Praxis beantwortet. Es zeigte sich, dass die Ergebnisse immer dann schlecht wurden, wenn die Ordnung der Polynome größer wurde als 110. In dem erstellten Programm kann die Ordnung der Polynome beliebig begrenzt werden, es hat jedoch keinen Sinn, mehr als die 110 Reihenglieder zuzulassen. Bei einer Begrenzung der Ordnung auf 80 liefert die Reihenentwicklung immer noch sehr gute Ergebnisse wenn die Stabkennzahl der Bedingung

$$\varepsilon < \approx 40 \quad (7.36)$$

gehört. Dies wurde mit den beiden Alternativen

$$\varepsilon_1 = l \sqrt[2]{\frac{GD}{EC}} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = l \sqrt[4]{\frac{B}{EC}} \quad (7.37)$$

überprüft. Eine Mischung von Drillsteifigkeit und Bettung wurde nicht untersucht. Wird diese Grenze überschritten, muss der Stab in so viele Segmente geteilt werden, dass die zuvor genannte Bedingung eingehalten ist. Mit dieser Teilung kann dann die Berechnung durchgeführt werden.

# 8 Das Weggrößenverfahren

Das Weggrößenverfahren wurde hier vor allem deshalb gewählt, weil es in sehr anschaulicher Art und Weise ermöglicht zum einen die Besonderheiten bei der Lösung der speziellen Differentialgleichung herauszustellen und zum anderen die Formulierung der Lagerungsbedingungen sehr einsichtig zulässt. Weiterhin sei die numerische Kontrolle der Symmetrie bei den Stabsteifigkeitsmatrizen erwähnt, die es erlaubt, Fehler, die sich bei der Bearbeitung und der Programmierung des Problems einschleichen, zu erkennen und zu beheben. Wesentlich ist auch das Vorliegen einer bandsymmetrischen Struktur, die es außerdem zulässt, dieses Verfahren auch auf kleinen Rechenanlagen und PCs anzuwenden. In die VTB wurde dieses Verfahren zum ersten Male von Hanf [11] eingeführt und auch Heppner [17] hat dieses Verfahren verwendet. Die nachfolgend beschriebenen Definitionen der Weg- und Schnittgrößen sowie der Steifigkeitsmatrizen entspricht der Darstellung in [11], lediglich die Lösungsfunktionen sind nunmehr mit der Reihenentwicklung ermittelt. Bei der Definition und Einarbeitung der Lagerungsbedingungen und dem Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix wurde ein neuer Weg beschritten.

## 8.1 Die Definition der Weggrößen

Als Weggrößen werden die absoluten Verschiebungen und deren 1. Ableitungen der ausgewählten Differentialgleichungen gewählt.

$$\begin{array}{ll} V & [\text{Länge}] \\ V' & [-] \end{array} \quad (8.1)$$

es wird hier ganz bewusst darauf verzichtet bezogene Größen einzuführen. Die Darstellung wird insgesamt transparenter und die hier verwendeten weiterverarbeitenden Routinen, wie Cholesky-Verfahren wurden so programmiert, dass große Determinanten oder Steifigkeiten ohne Belang sind. Außerdem ist es immer möglich, bei der Belegung der Gesamtsteifigkeitsmatrix Bezugswerte einzuführen.

## 8.2 Die Definition der Schnittgrößen

Die Schnittgrößen sind definiert über das Arbeitskomplement zu den zuvor beschriebenen Weggrößen und liegen für die Theorie 1. Ordnung aus der Variationsrechnung als Randterme für Platten und Scheibenanteile zusammengefasst in Gleichung (5.28) vor. Die Zusatzterme aus der Theorie 2. Ordnung wurden in Kapitel 6 hergeleitet und in Gleichung (6.22) zusammengestellt. Wird dabei die Orthogonalisierung der Zustände und die daraus resultierende Diagonalität der Widerstandsmatrix  $\mathbf{C}$  berücksichtigt, so werden die Schnittgrößen, das sind die verallgemeinerte Querkraft  ${}^kS^*$  und das verallgemeinerte

Moment  ${}^k W^*$  berechnet aus

$$\begin{aligned}
 {}^k S^* &= \mp E^k C^k V''' \pm \sum_{j=1}^{n_Z} G \left( {}^{kj} D - {}^{jk} D_2 \right) {}^j V' \\
 &\pm \sum_{j=1}^{n_Z} \left( {}^{kj} K_{\sigma,s} {}^i V + {}^{kj} K_{\sigma,x} {}^i W \right) {}^j V' \\
 &\pm \sum_{j=1}^{n_Z} \left( {}^{kj} K_{\tau,e} {}^i V' + {}^{kj} K_{\tau,g} {}^i W' \right) {}^j V \quad [\text{Kraft}]
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

$${}^k W^* = \pm E^k C^k V'' \mp \sum_{j=1}^{n_Z} G {}^{kj} D_2 {}^j V \quad [\text{Kraft} \cdot \text{Länge}]. \tag{8.3}$$

Die oberen/unteren Vorzeichen gelten für den rechten/linken Rand. Sie ergeben sich durch die Anpassung der an den Schnittufern entgegengesetzt wirkenden Kraftgrößen an die Weggrößendefinition. Nur bei Anwendung der Theorie 2. Ordnung sind die  ${}^{kj} K$ -Terme anzusetzen.

### 8.3 Die Ermittlung der Stabsteifigkeitsmatrizen

Für das Erstellen der Stabsteifigkeitsmatrizen werden die Randwerte zunächst in Abhängigkeit von den freien Koeffizienten aufgestellt. Dies geschieht hier, indem nacheinander jeder der freien Koeffizienten  $a_{k,r}$  aus Gleichung (7.2) mit

$$a_{k,r} = \frac{1}{r!} \tag{8.4}$$

belegt wird (die übrigen freien Koeffizienten sind Null) und damit die Polynome berechnet werden. Diese Wahl der Koeffizienten hat zur Folge, dass bei der  $r$ -ten Ableitung das konstante Glied zu 1 wird. Die so entstandenen Polynome werden mit  $\bar{\mathbf{a}}_p$  für den freien Koeffizienten  $c_p$  bezeichnet. Es gilt dann

$$\mathbf{V}_p = \bar{\mathbf{a}}_p \Xi \cdot c_p. \tag{8.5}$$

Der Zeilenvektor zur Verformungsfunktion  ${}^k V_p$  in  $\bar{\mathbf{a}}_p$  wird zu  ${}^k \bar{\mathbf{a}}_p$  definiert. Mit seinen Ableitungen

$$\frac{d^q {}^k \bar{\mathbf{a}}_p \Xi}{d\xi^q} = {}^k \bar{\mathbf{a}}_p^{[q]} \Xi \tag{8.6}$$

gemäß Gleichung (7.3) ergibt, lassen sich die Randwerte der Verformungen und deren 1. Ableitung berechnen.

$${}^k r_{0,p}(\xi_{e/b}) = {}^k \bar{\mathbf{a}}_p^{[0]} \Xi_{e/b} \tag{8.7}$$

$${}^k r_{1,p}(\xi_{e/b}) = \frac{2}{\ell} {}^k \bar{\mathbf{a}}_p^{[1]} \Xi_{e/b}. \tag{8.8}$$

Die Zusammenfassung dieser Randwerte am Anfang und Ende jedes Stabes infolge aller freien Koeffizienten führt bei einem System aus  $m$  Differentialgleichungen zu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} {}^1V_{h,b} \\ {}^1V'_{h,b} \\ \vdots \\ {}^jV_{h,b} \\ {}^jV'_{h,b} \\ \vdots \\ {}^mV_{h,b} \\ {}^mV'_{h,b} \\ \hline {}^1V_{h,e} \\ {}^1V'_{h,e} \\ \vdots \\ {}^jV_{h,e} \\ {}^jV'_{h,e} \\ \vdots \\ {}^mV_{h,e} \\ {}^mV'_{h,e} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} {}^1r_{0,1}(\xi_b) & \dots & {}^1r_{0,p}(\xi_b) & \dots & {}^1r_{0,4m}(\xi_b) \\ {}^1r_{1,1}(\xi_b) & \dots & {}^1r_{1,p}(\xi_b) & \dots & {}^1r_{1,4m}(\xi_b) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^jr_{0,1}(\xi_b) & \dots & {}^jr_{0,p}(\xi_b) & \dots & {}^jr_{0,4m}(\xi_b) \\ {}^jr_{1,1}(\xi_b) & \dots & {}^jr_{1,p}(\xi_b) & \dots & {}^jr_{1,4m}(\xi_b) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^mr_{0,1}(\xi_b) & \dots & {}^mr_{0,p}(\xi_b) & \dots & {}^mr_{0,4m}(\xi_b) \\ {}^mr_{1,1}(\xi_b) & \dots & {}^mr_{1,p}(\xi_b) & \dots & {}^mr_{1,4m}(\xi_b) \\ \hline {}^1r_{0,1}(\xi_e) & \dots & {}^1r_{0,p}(\xi_e) & \dots & {}^1r_{0,4m}(\xi_e) \\ {}^1r_{1,1}(\xi_e) & \dots & {}^1r_{1,p}(\xi_e) & \dots & {}^1r_{1,4m}(\xi_e) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^jr_{0,1}(\xi_e) & \dots & {}^jr_{0,p}(\xi_e) & \dots & {}^jr_{0,4m}(\xi_e) \\ {}^jr_{1,1}(\xi_e) & \dots & {}^jr_{1,p}(\xi_e) & \dots & {}^jr_{1,4m}(\xi_e) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^mr_{0,1}(\xi_e) & \dots & {}^mr_{0,p}(\xi_e) & \dots & {}^mr_{0,4m}(\xi_e) \\ {}^mr_{1,1}(\xi_e) & \dots & {}^mr_{1,p}(\xi_e) & \dots & {}^mr_{1,4m}(\xi_e) \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}_{01}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \\ \vdots \\ c_{4m} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad (8.9)$$

Zur Erhöhung der Übersicht werden die Anfangswerte von den Endwerten durch eine horizontale Linie getrennt.

Dabei wurde außerdem die neue Definition des Stababschnittes konsequent verwendet, d.h. bei den Ableitungen der Verformungsfunktionen nach der Produktregel der Faktor  $\frac{2}{\ell}$  statt dem bisher bei der Herleitung der Lösungen Differentialgleichungen in Kapitel 7 verwendeten  $\frac{1}{\ell}$ . Dies wird auch nachfolgend weiter so gehalten.

Die Matrix der Schnittgrößen (Arbeitskomplemente) wird entsprechend zu  $\mathbf{R}_{01}$  aufgebaut. Dabei werden die Abkürzungen

$${}^k r_{3,p}(\xi_{e/b}) = \left( \mp \frac{8}{\ell^3} E^k C {}^k \bar{\mathbf{a}}_p^{[3]} \pm \frac{2}{\ell} \sum_{j=1}^m G \left( {}^{kj} D - {}^{jk} D_2 \right) {}^j \bar{\mathbf{a}}_p^{[1]} \right) \Xi_{e/b} \quad (8.10)$$

$$\pm \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left( {}^{kj} K_{\sigma,s} {}^i \mathbf{b}^{[0]} - {}^{kj} K_{\sigma,x} \frac{4}{\ell^2} {}^i \mathbf{b}^{[2]} E^i C \right) \Xi_{e/b} \cdot {}^j r_{1,p}(\xi_{e/b})$$

$$\pm \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left( {}^{kj} K_{\tau,e} \frac{2}{\ell} {}^i \mathbf{b}^{[1]} - {}^{kj} K_{\tau,g} \frac{8}{\ell^3} {}^i \mathbf{b}^{[3]} E^i C \right) \Xi_{e/b} \cdot {}^j r_{0,p}(\xi_{e/b})$$

$${}^k r_{2,p}(\xi_{e/b}) = \left( \pm \frac{4}{\ell^2} E^k C {}^k \bar{\mathbf{a}}_p^{[2]} \mp \sum_{j=1}^m G {}^{kj} D_2 {}^j \bar{\mathbf{a}}_p^{[0]} \right) \Xi_{e/b} \quad (8.11)$$

unter Verwendung von Gleichung (8.6) sowie Gleichungen (8.2) und (8.3) eingeführt.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} {}^1S_{h,b}^* \\ {}^1W_{h,b}^* \\ \vdots \\ {}^jS_{h,b}^* \\ {}^jW_{h,b}^* \\ \vdots \\ {}^mS_{h,b}^* \\ {}^mW_{h,b}^* \\ \hline {}^1S_{h,e}^* \\ {}^1W_{h,e}^* \\ \vdots \\ {}^jS_{h,e}^* \\ {}^jW_{h,e}^* \\ \vdots \\ {}^mS_{h,e}^* \\ {}^mW_{h,e}^* \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}} = \underbrace{\begin{pmatrix} {}^1r_{3,1}(\xi_b) & \dots & {}^1r_{3,p}(\xi_b) & \dots & {}^1r_{3,4m}(\xi_b) \\ {}^1r_{2,1}(\xi_b) & \dots & {}^1r_{2,p}(\xi_b) & \dots & {}^1r_{2,4m}(\xi_b) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^jr_{3,1}(\xi_b) & \dots & {}^jr_{3,p}(\xi_b) & \dots & {}^jr_{3,4m}(\xi_b) \\ {}^jr_{2,1}(\xi_b) & \dots & {}^jr_{2,p}(\xi_b) & \dots & {}^jr_{2,4m}(\xi_b) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^mr_{3,1}(\xi_b) & \dots & {}^mr_{3,p}(\xi_b) & \dots & {}^mr_{3,4m}(\xi_b) \\ {}^mr_{2,1}(\xi_b) & \dots & {}^mr_{2,p}(\xi_b) & \dots & {}^mr_{2,4m}(\xi_b) \\ \hline {}^1r_{3,1}(\xi_e) & \dots & {}^1r_{3,p}(\xi_e) & \dots & {}^1r_{3,4m}(\xi_e) \\ {}^1r_{2,1}(\xi_e) & \dots & {}^1r_{2,p}(\xi_e) & \dots & {}^1r_{2,4m}(\xi_e) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^jr_{3,1}(\xi_e) & \dots & {}^jr_{3,p}(\xi_e) & \dots & {}^jr_{3,4m}(\xi_e) \\ {}^jr_{2,1}(\xi_e) & \dots & {}^jr_{2,p}(\xi_e) & \dots & {}^jr_{2,4m}(\xi_e) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ {}^mr_{3,1}(\xi_e) & \dots & {}^mr_{3,p}(\xi_e) & \dots & {}^mr_{3,4m}(\xi_e) \\ {}^mr_{2,1}(\xi_e) & \dots & {}^mr_{2,p}(\xi_e) & \dots & {}^mr_{2,4m}(\xi_e) \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}_{32}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \\ \vdots \\ c_{4m} \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad (8.12)$$

Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  fordert nur noch die Ermittlung des Vektors  $\mathbf{c}$  der unabhängigen Koeffizienten der Differentialgleichungen aus Gleichung (8.9)

$$\mathbf{c} = \mathbf{R}_{01}^{-1} \cdot \mathbf{v} \quad (8.13)$$

um ihn in Gleichung (8.12) einzusetzen.

$$\mathbf{w} = \underbrace{\mathbf{R}_{32} \cdot \mathbf{R}_{01}^{-1}}_{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{v} \quad (8.14)$$

Diese Vorgehensweise ist vollkommen analog zu der in [11]. Lediglich die eingesetzten Funktionen sind unterschiedlich.

## 8.4 Der Vektor der Zwangsschnittgrößen

Unter der Voraussetzung, dass die Belastungen zustandsweise in Form von Polynomen vorliegen, kann, wie bereits in Kapitel 7.2 beschrieben, der Vektor der Randgrößen der Partikularlösung aufgestellt werden. Hierfür werden alle freien Koeffizienten zu Null gesetzt, was zur Folge hat, dass der Vektor der Randgrößen neben den Randschnittgrößen

$\mathbf{w}_p$  auch noch Randverformungen  $\mathbf{v}_p$  enthält

$$\mathbf{w}_p = \begin{pmatrix} {}^1S_{p,b}^* \\ {}^1W_{p,b}^* \\ \vdots \\ {}^jS_{p,b}^* \\ {}^jW_{p,b}^* \\ \vdots \\ {}^mS_{p,b}^* \\ {}^mW_{p,b}^* \\ {}^1S_{p,e}^* \\ {}^1W_{p,e}^* \\ \vdots \\ {}^jS_{p,e}^* \\ {}^jW_{p,e}^* \\ \vdots \\ {}^mS_{p,e}^* \\ {}^mW_{p,e}^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_p = \begin{pmatrix} {}^1V_{p,b} \\ {}^1V'_{p,b} \\ \vdots \\ {}^jV_{p,b} \\ {}^jV'_{p,b} \\ \vdots \\ {}^mV_{p,b} \\ {}^mV'_{p,b} \\ {}^1V_{p,e} \\ {}^1V'_{p,e} \\ \vdots \\ {}^jV_{p,e} \\ {}^jV'_{p,e} \\ \vdots \\ {}^mV_{p,e} \\ {}^mV'_{p,e} \end{pmatrix}, \quad (8.15)$$

die wegen der einzuhaltenden Kontinuitätsbedingung verschwinden müssen. Der Vektor der Zwangsschnittgrößen ergibt sich aus der Bedingung, dass die Randverformungen verschwinden. Diese erhält man, wenn man den Ausgleich der Verformungssprünge mit der homogenen Lösung durchführt. Mit Hilfe der Stabsteifigkeitsmatrix erhält man den Vektor der Zwangsschnittgrößen zu:

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_p - \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_p. \quad (8.16)$$

Bevor mit den Steifigkeitsmatrizen und den Zwangsschnittgrößen das Gesamtsystem aufgebaut und gelöst werden soll, erfolgt die Behandlung der Lagerungsbedingungen.

## 8.5 Die Lagerungsbedingungen und Lagerreaktionen

Die Einarbeitung der Lagerungsbedingungen wird hier so vorgenommen, dass sie die grundsätzliche Behandlung des Aufbaus des Gleichungssystems nicht stört sondern ausschließlich ergänzt. Aus diesem Grunde wird sie vorweg behandelt und später als Korrektur oder Ergänzung zum Aufbau der Steifigkeitsmatrizen und der rechten Seiten betrachtet.

Lagerungsbedingungen, Lagerkräfte und Lagerverschiebungen bilden eine Gruppe von Bedingungen, die gemeinsam und einheitlich abgearbeitet werden können. Dies wird durch die Verwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen (P.d.v.V.), das hier zur Anwendung kommt einfach und systematisch erreicht.

Um einen Stab in seiner Längsrichtung zu beschreiben ist es erforderlich Aussagen über seine Lagerung zu machen. In der Technischen Biegetheorie gibt es hierfür die bekannten Vereinbarungen wie Lager, Gabellager, Einspannung etc., um nur einige zu nennen. Diese Bedingungen beziehen sich üblicherweise auf einen Verformungszustand, der Biegung um ausgewählte Achsen, der Torsion und der Normalkraft; d.h. es liegen modale Lager vor, die

immer nur einen Zustand beschreiben. Stimmen Hauptachsen und gewählte Querschnittsachsen nicht mehr überein, so wird die Formulierung der Randbedingungen nicht mehr ganz so einfach. Es entstehen Abhängigkeiten der Verformungszustände voneinander.

Diese Problematik wurde in vorausgegangenen Arbeiten und Anwendungen zur VTB durch die Einführung zustandsorientierter Lagerungen umgangen. Mit der Einführung der Schubverformung als Freiheitsgrad ergeben sich jedoch lineare Abhängigkeiten bei den Verschiebungen, so dass die Lagerungsbedingungen ohne Verletzung des Gleichgewichts nicht mehr ohne Weiteres zustandsweise formuliert werden können, wenn das Problem nicht Sonderfällen zuzuordnen ist.

Um die Lagerungen des Stabes zu beschreiben wurden zwei unterschiedliche Lagerungstypen eingeführt:

- Die diskreten Lager, wo einzelne Knoten des Querschnitts mit einem oder mehreren Pendelstäben gelagert werden.
- Die Zustandslager bei denen wahlweise die Verformungresultante und/oder ihre Ableitung verschwinden muss.

Die Beibehaltung der Zustandslager bei gleichzeitiger Einführung der Knotenlager liegt einerseits in der Vergleichbarkeit der Berechnungen mit früheren Arbeiten, andererseits in einem mathematischen Rangabfall bei den Verformungsfunktionen bei Auswahl der Schubfreiheitsgrade begründet. Dieser Rangabfall wurde von Möller [23] dadurch umgangen, dass er die Betonungsfunktion für die Verwölbung in der gleichen Ableitungsstufe wählte wie die der Verschiebungen in der Querschnittsebene. Dadurch erhielt er allerdings den Bruch mit der Wölbkrafttorsion, die die Verwölbung als Funktion der Verwindung, also der Ableitung der Verformungsfunktion beschreibt. Für die hier beschriebene Stammfunktion zu den gesuchten Verformungsgrößen (Verwindungen oder 1. Ableitungen) ist ein aus der zusätzlichen Integration stammender Randwert frei wählbar. Für diese Verformungsfunktionen wird an einer beliebigen Stelle die Forderung aufgestellt:

$${}^jV(x_0) = 0 \quad (8.17)$$

Dabei ist allerdings noch nicht geklärt, für welche  $j$  diese Bedingung gilt.

Dies kann zusammen mit dem Rangabfall anschaulich im Rahmen der VTB geklärt werden. Dazu wird zunächst einmal ein Blick auf den Normalkraftzustand geworfen. Dieser hat, um in das Schema der VTB zu passen, ebenso wie alle anderen Zustände, eine Verformungsfunktion um den Verlauf der Verwölbung und der Normalkraft zu beschreiben. Da dieser Zustand keinerlei Verschiebung in der Querschnittsebene aufweist, hat die Verformungsfunktion selber keine mechanische Bedeutung. Sie muss jedoch, um mathematisch bei der Lösung der Differentialgleichung keine Singularitäten zu verursachen, an einem beliebigen Rand mit einem beliebigen Wert definiert werden. Dies kann z. B. durch die Bedingung

$${}^1V(0) = 0 \quad (8.18)$$

erfüllt sein. Damit beschreibt die Ableitung der Funktion aus der Lösung der Differentialgleichung die gesuchte Verwölbung des Querschnitts und die Verformungsfunktion selbst ergibt sich aus der Integration der Veränderungen.

Im nächsten Schritt der Beschreibung wird ein Einscheibenquerschnitt betrachtet, der keinerlei Zwischenknoten aufweisen soll. Dieser Querschnitt weist die aus der Technischen Biegetheorie bekannten vier Verformungszustände auf. Nimmt man noch die Membranschubverformung der Scheibenmittelebene hinzu, so stellt sich die Frage, wie diese Schubverformung angebracht werden soll. Ganz unabhängig davon, wie sich die Steifigkeiten verteilen, kann man sich eine Verformungsfigur denken, bei der die Verwölbung wie beim Biegezustand um die starke Achse auftritt ohne dabei Verschiebungen in der Querschnittsebene zu erzeugen. Dieser Zustand wird sich dann genauso verhalten wie der Normalkraftzustand. Die Amplitude  ${}^jV$  hat keine Verformung zu beschreiben und muss somit an einer Stelle des Stabes beliebig gewählt werden. Eine andere Möglichkeit die Membranschubverformung anzusetzen besteht darin, die Verwölbung zu verhindern und der Scheibe lediglich eine Verschiebung in Umfangsrichtung  $\bar{f}_s$  zu ermöglichen. Damit gibt es zwei Zustände, die eine Umfangsverschiebung des Querschnitts beschreiben. Für die Beschreibung der Lagerungsbedingungen muss dann die Summe der Verschiebungen aus beiden Zuständen herangezogen werden und liefert damit Abhängigkeiten der Zustände untereinander, die aber wiederum an keinem Rand einen Absolutwert beschreiben, da die Verwölbung zur Beschreibung einer Randverformung nicht existiert. Auch hier muss ein Randwert frei definiert werden. Gleiches tritt auf wenn der Schubzustand so gewählt wird, dass Verwölbungen und Umfangsverschiebungen  $\bar{f}_s$  auftreten.

Zuletzt sei das Auftreten von Zwischenknoten für die Schubzustände beschrieben. Für sie gilt genau das gleiche wie für den zuvor beschriebenen Membranschubverformungszustand, sodass sich zum Schluss folgende Regeln für die Lager bei Querschnitten mit Schubverformungen aufstellen lässt:

1. Zusätzlich zum Normalkraftzustand  ${}^1V$  müssen bei (in der Querschnittsebene ungelagerten) Querschnitten alle Schubzustände – ausgenommen der Verdrehzustand – an *einer* beliebigen Abschnittsgrenze die Bedingung  ${}^kV = 0$  erfüllen. Die Anzahl verringert sich bei Querschnitten die in ihrer Ebene gelagert sind.
2. Die Lagerungen müssen diskret als Summe der Verschiebungskomponenten einzelner Zustände formuliert werden.
3. Zustandsauswahl ist nur noch in Sonderfällen möglich

Dies wird anhand des Beispielquerschnitts HE 120 A mit Schubverformungen in Abbildung A.4 auf Seite 90 deutlich. An den Verschiebungen der Zustände 2, 6 und 7 in der Querschnittsebene kann man erkennen, dass sie sich nur durch ihre Amplitude voneinander unterscheiden und somit linear abhängig sind. Aus diesem Grunde müssen zu den üblichen Lagerungsbedingungen weitere Bedingungen hinzugefügt werden, die eine Aussage über die Anfangswerte dieser Verformungsergebnisse machen.

### 8.5.1 Die Beschreibung der Lagerungsbedingungen

Um die Wahl der Lagerungsbedingungen für den Benutzer möglichst einfach zu gestalten, wurden zusätzliche, bereits aus der technischen Biegetheorie bekannte Lager eingeführt. Diese sind:

**Gabellager** Es fordert für alle ausgewählten Zustände, die Verformungsergebnisse  ${}^kV$  an der gelagerten Stelle zu Null, sofern sie Verschiebungen in der Querschnittsebene aufweisen. Verwölbungen sind nach wie vor möglich.

**Einspannung** Sie enthält als Teilmenge das Gabellager. Zusätzlich wird für alle Zustände (ausgenommen der Normalkraftzustand  ${}^1V$ ) die Verwölbung zu Null gesetzt, sofern sie Verwölbungen aufweisen.

**Drillschlaffe Kopfplatte** Sie entspricht prinzipiell dem Gabellager allerdings ohne Lagerung der Starrkörperzustände ( ${}^2V$  bis  ${}^4V$ ).

**Starre Kopfplatte** Sie entspricht wiederum der Einspannung mit der Einschränkung, dass die Verschiebungszustände ( ${}^1V$  bis  ${}^3V$ ) von der Lagerung ausgeschlossen werden.

Die Zustandslager  ${}^kV = 0$  und  ${}^kV' = 0$  sind nach wie vor möglich und erforderlich wie z.B. bei der Behandlung der o.g. Sonderfälle.

Für die Beschreibung der diskreten Lager ist es sinnvoll, drei Fälle zu unterscheiden. Sicherlich lässt sich auch ein festes Lager mit Pendelstäben beschreiben, der Einfachheit und der Übersichtlichkeit halber werden drei verschiedene Lagerungstypen eingeführt, die sich in der Anzahl der einzuführenden Bedingungen, der Wertigkeit des Lagers unterscheiden. Diese Lagerungstypen sind in Abbildung 8.1 dargestellt.

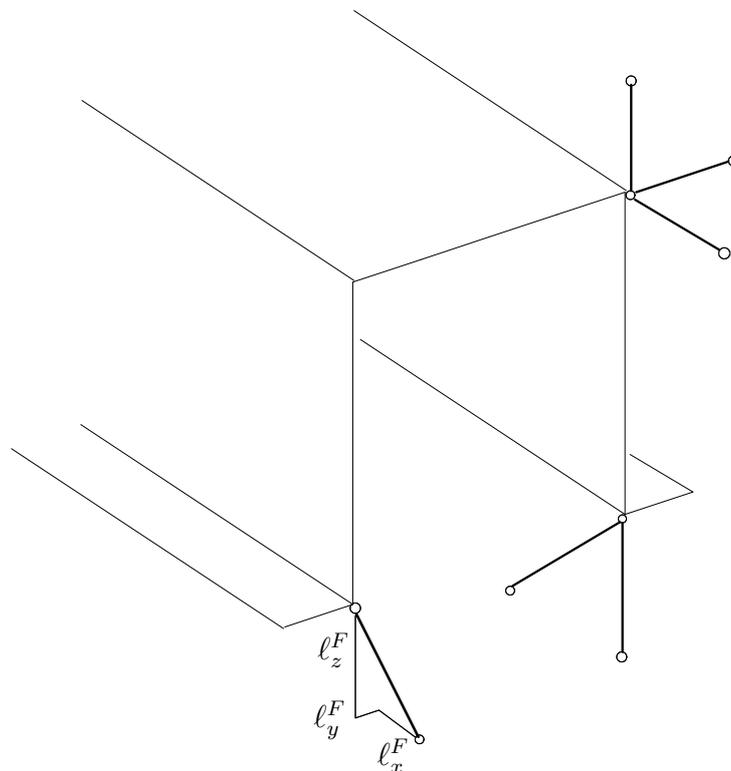


Abbildung 8.1: Diskrete Lagerung einer Stützstelle mit Pendelstab (1-wertig), Verschieblicher Lagerung (2-wertig) und Fester Lagerung (3-wertig)

**ein-wertige Lagerung** Dies ist der Pendelstab. Er verhindert die Verschiebung in einer beliebigen Richtung und liefert auch nur eine einzige Lagerungsbedingung.

**zwei-wertige Lagerung** Diese Lagerung kann man sich als die Kombination zweier Pendelstäbe vorstellen und wird intern auch so behandelt. Als Resultat bleibt eine Verschieblichkeit in einer beliebigen Richtung. Da diese Beschreibung einfacher ist als die Richtungen zweier Pendelstäbe, wird hierüber das Lager definiert.

**drei-wertige Lagerung** Feste (unverschiebliche) Lagerung eines Knotens. Auch dieses Lager wird intern in drei Pendelstäbe in Richtung der Koordinatenachsen aufgelöst.

Auf diese Art und Weise muss für jeden gelagerten Knoten nur eine Bedingung formuliert und eingegeben werden. Es ist allerdings darauf zu achten, dass bei der Formulierung der Lager keine geometrische Überbestimmtheit entsteht, die zu unvorhersehbaren Ergebnissen führen kann. Weiterhin ist anzumerken, dass für die Beschreibung von Lagerverschiebungen ausschließlich Pendelstäbe oder Zustandslager verwendet werden können und mehrwertige Lager bereits bei der Beschreibung in Pendelstäbe oder Zustandslager aufgelöst werden müssen. Der Pendelstab oder die Verschieblichkeit wird über drei Richtungskomponenten beschrieben.

$\mathbf{L}_r^F = \{\ell_{x,r}^F, \ell_{y,r}^F, \ell_{z,r}^F\}^T$  Richtung der Festhaltung, also des Pendelstabes, beim einwertigen Lager am Knoten  $r$ .

$\mathbf{L}_r^V = \{\ell_{x,r}^V, \ell_{y,r}^V, \ell_{z,r}^V\}^T$  Richtung der Verschiebungsmöglichkeit beim zweiwertigen Lager am Knoten  $r$ .

Während bei der Verschieblichkeit das Vorzeichen der Richtung ohne Interesse ist, gilt beim Pendelstab die Vereinbarung, dass die Richtung von der Erdscheibe zum Stab angegeben wird. Die Pendelstabkraft ist dann positiv, wenn er gedrückt wird, was auch der Definition eines verschieblichen Lagers entspricht.

### 8.5.2 Die interne Behandlung der Lagerungsbedingungen

Da sich die zuvor beschriebenen Lagerungsbedingungen auf die drei grundlegenden Lager für Zustände (Verformungsamplituden und deren 1. Ableitungen) sowie Pendelstäbe zurückführen lassen, wird intern diese Vorgehensweise gewählt. Dies hat den großen Vorteil, dass nur wenige Fallunterscheidungen erforderlich sind. Dazu müssen die komplexen Lagerbeschreibungen die gegebenenfalls  $n - 1$  Zustände mit  ${}^kV = 0$  und/oder  ${}^kV' = 0$  enthalten, intern so umgewandelt werden, dass jede Komponente einzeln beschrieben wird. Diese Trennung ist für die Berechnung der Lagerkräfte zwingend erforderlich.

Bei der Umwandlung der Verschieblichkeit in zwei Ersatzpendelstäbe beim zweiwertigen Lager stellt sich die Frage, wie die beiden, frei zu wählenden Ersatzpendelstäbe am Tragwerk angeordnet werden. Es wurde festgelegt, dass der erste Pendelstab in der  $y$ - $z$ -Ebene, also der Querschnittsebene liegt. Für die Ermittlung ist zunächst zu klären, ob die Verschieblichkeit ausschließlich in Richtung der Stabachse stattfindet. Dieser Fall ist besonders zu behandeln und führt zu den beiden Pendelstäben am Knoten  $r$ :

$$\mathbf{L}_{r,1}^F = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_{r,2}^F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

## 8 Das Weggrößenverfahren

Das negative Vorzeichen rührt aus der zuvor beschriebenen Pendelstab- und Vorzeichendefinition. Positive Lasten, die in Richtung der Koordinaten wirken, sollen insgesamt positive Lagerreaktionen hervorrufen. Diese Vorzeichendefinition wird auch beim dreiwertigen Lager verwendet. Gibt es eine Verschiebungskomponente senkrecht zur  $x$ -Richtung, so ist der erste Ersatzpendelstab aus der Forderung zu ermitteln, dass er sowohl rechtwinklig zur Verschiebungsrichtung als auch zu  $x$ -Achse liegen soll. Dies wird über die Orthogonalitätsbedingung für Vektoren erreicht. Das äußere Produkt zweier nichtparalleler Vektoren liefert einen Vektor, der auf beiden senkrecht steht. Daher musste der o.g. Sonderfall getrennt behandelt werden. Es gilt:

$$\mathbf{L}_{r,1}^F = \mathbf{L}_r^V \times \{1, 0, 0\}^T \quad (8.20)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\ell_{z,r}^V \\ +\ell_{y,r}^V \end{pmatrix}. \quad (8.21)$$

Auch die Richtung des zweiten Ersatzpendelstabes lässt sich über das Vektorprodukt bestimmen; diesmal als

$$\mathbf{L}_{r,2}^F = \mathbf{L}_{r,1}^F \times \mathbf{L}_r^V \quad (8.22)$$

$$= \begin{pmatrix} \ell_{y,r,1}^F \ell_{z,r}^V - \ell_{z,r,1}^F \ell_{y,r}^V \\ \ell_{z,r,1}^F \ell_{x,r}^V - \ell_{x,r,1}^F \ell_{z,r}^V \\ \ell_{x,r,1}^F \ell_{y,r}^V - \ell_{y,r,1}^F \ell_{x,r}^V \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Alle für die Berechnung der Lagerungsbedingungen zu verwendenden Pendelstäbe werden zum Schluss noch auf die Länge von 1 normiert, so dass jede Komponente den Richtungs-cosinus enthält

$$\mathbf{L}_r^f = \mathbf{L}_r^F / |\mathbf{L}_r^F|. \quad (8.24)$$

Der hier eingeführte, kleingeschriebene Hochindex wird für die Bezeichnung der Einheits-Richtungsvektoren verwendet.

Letztendlich ist es das Ziel, aus den Lagerungsbedingungen Abhängigkeiten zwischen den hinterher verbleibenden globalen Unbekannten und den lokalen Unbekannten eines jeden Stabes herzustellen. Hierzu wird nachfolgende Definitionen benötigt:

$\mathbf{v}_r = \{u_r, v_r, w_r\}^T$  Vektor der Knotenverschiebungen am Knoten  $r$ , wobei sich jede Komponente wiederum aus den Produktsummen der einzelnen, ausgewählten Zustände zusammensetzt.

Der Vollständigkeit halber wird die Definition der Produktansätze für die Knotenverschiebungen nochmals aus den Kapiteln 3 und 4 zusammengefasst.

$$u_r = \sum_k {}^k u_r {}^k V^I \quad (8.25)$$

$$v_r = \sum_k {}^k v_r {}^k V \quad (8.26)$$

$$w_r = \sum_k {}^k w_r {}^k V \quad (8.27)$$

Es wird in der Folge auf die Darstellung mit dem Summenzeichen verzichtet sofern es eindeutig ist.

Vor der Aufstellung der eigentlichen Lagerungsbedingungen betrachten wir zunächst die Rückrechnung der Lagerkräfte, die, wie bereits erwähnt, mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen erfolgt. Das P.d.v.V. fordert Gleichgewicht an einem minimal verrückten System dadurch, dass die Summe aller äußeren (und inneren) Arbeiten an dieser Verrückung zu Null werden muss. Für die Berechnung der Lagerkräfte bedeutet dies, dass für jedes Lager eine Verrückungsfigur zu ermitteln ist bei der das Arbeitskomplement der gesuchten Kraft  $L_h$ , sei es eine Zustandsschnittgröße oder die Kraft eines Pendelstabes zu  $-1$  gesetzt wird. Für die Zustandslager erhält man für die Querkraft bzw. das Wölbmoment

$$-1 \cdot Y_h = {}^k V \quad (8.28)$$

$$-1 \cdot Y_h = {}^k V' \quad (8.29)$$

und beim Pendelstab am Knoten  $r$

$$-1 \cdot Y_h = \mathbf{L}_{h,r}^f \cdot \mathbf{v}_r \quad (8.30)$$

$$= \ell_{x,h,r}^f u_r + \ell_{y,h,r}^f v_r + \ell_{z,h,r}^f w_r. \quad (8.31)$$

Ersetzt man die Knotenverschiebungskomponenten durch ihre Produktansätze, so ist zu erkennen, dass sowohl Zustandslager als auch diskrete Lager von den Verformungsresultanten und ihren 1. Ableitungen abhängig sind und dass diskrete Lager Abhängigkeiten zwischen diesen Weggrößen erzeugen können.

Setzt man  $Y_h = 0$  so geht die Bestimmungsgleichung für die virtuelle Verrückungsfigur in die zugehörige Lagerungsbedingung über, da die Verschiebung in Richtung des Lagers nicht stattfinden kann. Ersetzt man  $Y_h$  durch die Amplitude einer zu berücksichtigende Lagerverschiebung, so ergibt sich daraus eine Verformungsfigur am Grundstab, aus dem die Belastungsglieder für die rechte Seite des Gleichungssystems berechnet werden können.

### 8.5.3 Die Matrix der Abhängigkeiten

Mit den zuvor beschriebenen Lagerungsbedingungen soll nunmehr der Zusammenhang zwischen den globalen und den lokalen Unbekannten einer Stützstelle hergestellt werden. Dieser Zusammenhang soll einerseits kompakt und andererseits leicht zu behandeln sein.

Dazu muss als erstes der lokale Unbekanntenvektor definiert sein. Er setzt sich aus den Verformungsresultanten und deren 1. Ableitungen zusammen, nacheinander für alle (ausgewählte) Zustände, so wie er bei der Aufstellung der Stabsteifigkeitsmatrix in Gleichung (8.9) definiert wurde, allerdings nur für diese Stützstelle, also wie am Stabanfang oder Stabende.

An jeder gelagerten Stabgrenze werden nun alle Lagerungsbedingungen – sowohl die zustandsbasierten Lager als auch alle (gegebenenfalls intern erzeugten) Pendelstäbe – in einem homogenen Gleichungssystem zusammengetragen. Für dieses homogene Gleichungssystem wird mit einem speziellen Gleichungssystemlöser das Fundamentalsystem berechnet. Man erhält dabei die Indizes der abhängigen Unbekannten und ihre Koeffizienten zu den nach wie vor unabhängigen Variablen. Lässt man den bei dieser Lösung

gleichfalls stattfindenden Zeilen- und Spaltentausch außer Acht, so erhält man die Lösung nach folgendem Schema:

$$0 = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{S}_{Y_a}} \end{pmatrix} \mathbf{Y}_a + \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{S}_Y} \end{pmatrix} \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{I}} \end{pmatrix} \mathbf{Y}_h \quad (8.32)$$

$$\mathbf{Y}_a = \begin{pmatrix} \boxed{-\mathbf{S}_{Y_a}^{-1} \cdot \mathbf{S}_Y} \end{pmatrix} \mathbf{Y} + \begin{pmatrix} \boxed{-\mathbf{S}_{Y_a}^{-1}} \end{pmatrix} \mathbf{Y}_h. \quad (8.33)$$

In dieser Gleichung ist zu erkennen, dass bei der Berechnung der virtuellen Verrückungen kein zusätzlicher Aufwand vonnöten ist. Die Koeffizientenmatrix zu  $\mathbf{Y}_h$  ergibt sich aus der Inversion der Bestimmungsmatrix  $\mathbf{S}_{Y_a}$  des Fundamentalsystems.

Der Zusammenhang zwischen den lokalen Verformungen einerseits und den globalen Unbekannten und den virtuellen Verrückungen andererseits ist über folgende Beziehung gegeben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{Y}_a} \\ \boxed{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}_{\text{lokal}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{-\mathbf{S}_{Y_a}^{-1} \cdot \mathbf{S}_Y} \\ \boxed{\mathbf{I}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}_{l,g}} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{-\mathbf{S}_{Y_a}^{-1}} \\ \boxed{\mathbf{0}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}_{l,v}} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{Y}_h} \end{pmatrix}. \quad (8.34)$$

Da die Matrix  $\mathbf{S}_{l,g}$  in einem großen Bereich der Einheitsmatrix entspricht, muss nur der obere Teil aufgehoben werden. Dadurch reduziert sich der erforderliche Speicherbereich, der zur Beschreibung der Lagerungsbedingungen vorzuhalten ist. Das Gleiche gilt für die Matrix der virtuellen Verrückungen  $\mathbf{S}_{l,v}$ , die in weiten Teilen der Nullmatrix  $\mathbf{0}$  entspricht. Die Transformationsmatrizen  $\mathbf{S}_{l,g}$ , die für alle gelagerten Abschnittsgrenzen aufzustellen sind, stellen die Basis für die Einarbeitung der Lagerungsbedingungen sowohl in der Gesamtsteifigkeitsmatrix als auch in den rechten Seiten dar, die Matrizen der virtuellen Verrückungen in  $\mathbf{S}_{l,v}$  sind für die Berechnung der Lagerreaktionen und für die Berechnung von Lagerverschiebungen essentiell.

#### 8.5.4 Die Berücksichtigung von Knotenfedern

Die Knotenfedern, die letztendlich wie Lager wirken, stellen eine Sonderform der Lager insofern dar, als sie infolge ihrer elastischen Natur, keine Abhängigkeiten zwischen den

Verformungsgrößen herstellen. Da sie aber zusammen mit den starren Lagern auftreten können und ihre Kräfte bei der Berechnung der Lagerreaktionen zu berücksichtigen sind, ist dies die passende Stelle um ihre Behandlung zu beschreiben. Die hier behandelten Knotenfedern stellen im Gegensatz zu den bei den Querschnittswerten beschriebenen Federn in Kapitel 5 – die entlang der gesamten Stabachse wirken und üblicherweise eine kontinuierliche, elastische Anbindung an andere Bauteile abbilden – singuläre elastische Einwirkungen dar mit denen die Nachgiebigkeit der Unterstützung des Trägers abgebildet wird. Die elastischen Knotenfedern werden über ihre Steifigkeiten in Richtung der Stabkoordinaten beschrieben. Daher können sie, ähnlich wie Pendelstäbe oder Verschieblichkeiten, behandelt werden jedoch tritt an die Stelle der Richtungskomponente die jeweilige Steifigkeit, die in jeder Koordinatenrichtung unterschiedlich sein kann. Dabei sind auch Federn möglich, die nur in einer Koordinatenrichtung wirken.

$\mathbf{f}_r = \{f_{x,r}, f_{y,r}, f_{z,r}\}^T$  Federkennungen in den unterschiedlichen Koordinatenrichtungen am Knoten  $r$ .

Damit sich die Federn in das intern aus Zustandslagern und Pendelstäben bestehende System der Lagerungsbedingungen einpassen, wird für jede Federsteifigkeitskomponente  $f_r > 0$  intern eine Feder erstellt, die nur diese eine Steifigkeit enthält und so die Berechnung und Ausgabe einer einzelnen Kraftkomponente ermöglicht. Federn ohne Federsteifigkeit (dies beinhaltet auch negative Steifigkeiten) werden ignoriert. Diese internen Federn werden, sofern es auch starre Lager gibt, hinter denselben abgelegt. Aus dem Federgesetz ergibt sich mit den Knotenverschiebungen des Zustands  ${}^jV$

$${}^j\mathbf{F}_r = \mathbf{f}_r \cdot {}^j\mathbf{v}_r \quad (8.35)$$

$$= \begin{pmatrix} f_{x,r} {}^j u_r {}^j V' \\ f_{y,r} {}^j v_r {}^j V \\ f_{z,r} {}^j w_r {}^j V \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

Die Arbeit dieser Federkraft an den Knotenverschiebungen des Zustands  ${}^kV$  ergibt sich zu

$${}^k j \mathcal{W} = {}^k \mathbf{v}_r^T \cdot {}^j \mathbf{F}_r \quad (8.37)$$

$$= f_{x,r} {}^k u_r {}^j u_r {}^k V' {}^j V' + \left( f_{y,r} {}^k v_r {}^j v_r + f_{z,r} {}^k w_r {}^j w_r \right) {}^k V {}^j V. \quad (8.38)$$

Stellt man für alle  $k$  und alle  $j$  die Arbeiten zusammen, so ergeben sich daraus alle Elemente der Feder-Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_f$  an der gelagerten Stabgrenze.

## 8.6 Die Einarbeitung der Lagerungsbedingungen

Da die Beziehungen zwischen den lokalen und globalen Unbekannten einer Stützstelle über die Matrix  $\mathbf{S}_{l,g}$  gegeben ist, stellt sich jetzt nur noch die Frage, wie die Einarbeitung in die Stabsteifigkeitsmatrizen und die dazugehörigen rechten Seiten bzw. die Federsteifigkeitsmatrix zu bewerkstelligen ist. In dieser Arbeit wird von der Reduzierung der Anzahl der Unbekannten kein Gebrauch gemacht, da es die systematische und übersichtliche Behandlung der Gesamtsteifigkeitsmatrix erschweren würde. Aus diesem Grunde werden für

die entfallenden Unbekannten Füllzeilen und -spalten eingearbeitet die nur Einsen auf den Hauptdiagonalen erhalten, damit die Gesamtsteifigkeitsmatrix ihre Definitheit dadurch nicht verliert. Dazu werden die Stützstellentransformationsmatrizen um so viele Nullspalten ergänzt, bis sie wieder quadratisch sind.

### 8.6.1 ... in die Steifigkeitsmatrix

Hierfür stehen grundsätzlich zwei Wege offen. Der eine besteht darin, zunächst die ungelagerte Gesamtsteifigkeitsmatrix aufzubauen und dann durch Transformation der Unbekannten und der Arbeitskomplemente an den gelagerten Abschnittsgrenzen die Lagerungen einzuarbeiten. Der andere Weg besteht darin, die Stabsteifigkeitsmatrizen an den gelagerten Enden auf die globalen Unbekannten zu transformieren. Hierfür muss die erweiterte Transformationsmatrix oder Stabtransformationsmatrix aufgestellt werden. Sie besteht aus vier Untermatrizen, zwei Nullmatrizen und zwei auf die volle Spaltenzahl erweiterte Transformationsmatrizen für die beiden Stabenden.

$$\mathbf{S}_{S,l,g} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{l,g,links} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{l,g,rechts} \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

Durch links-rechts-Multiplikation der Stabsteifigkeitsmatrix mit der Transformationsmatrix erhält man die auf die globalen Unbekannten transformierte Stabsteifigkeitsmatrix. Da diese Bereiche aufweist, in denen Zeilen und Spalten nur Nullen enthalten, müssen diese auf den Hauptdiagonalen mit Einsen versehen werden.

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{S}_{S,l,g}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{S}_{S,l,g} \quad (8.40)$$

Falls an einem Stabende keine Lager vorgesehen wurden oder infolge von Stabteilung nur eine Segmentgrenze (siehe Kapitel 8.7) vorliegt, vereinfacht sich der zugehörige Teil (Untermatrix) in  $\mathbf{S}_{S,l,g}$  zur Einheitsmatrix.

### 8.6.2 ... in die rechten Seiten und Lösungsvektoren

Die Behandlung der rechten Seiten erfolgt dadurch, dass der Belastungsvektor, der zu einer gelagerten Abschnittsgrenze gehört, von links mit der transponierten Stützstellentransformationsmatrix multipliziert wird.

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{S}_{l,g}^T \cdot \mathbf{v} \quad (8.41)$$

Damit hat der Belastungsvektor die gleiche Transformation erfahren, wie die zugehörige Stützstelle der Gesamtsteifigkeitsmatrix bzw. die Enden der zugehörigen Stabsteifigkeitsmatrizen.

Nach Lösung des globalen Gleichungssystems erfolgt die Transformation der globalen Lösungen zurück auf die lokalen Unbekannten der Stützstellen. Diese ergibt sich wie bereits beschrieben aus Gleichung (8.34).

### 8.6.3 ... in die Federsteifigkeitsmatrix

Die Matrix der Federsteifigkeiten weist gegenüber der Stabsteifigkeitsmatrix nur die Hälfte an Zeilen und Spalten auf, da sie naturgemäß nur an der Stützstelle wirkt, an der die Feder angebracht ist. Das gilt auch für mehrere Federn an einer Stützstelle. Die Transformationsmatrizen  $\mathbf{S}_{l,g}$  sind – sofern es sich nicht um die erste oder letzte Stützstelle handelt, bei denen es nur einen angrenzenden Stab gibt – rechts und links der Stützstelle identisch. Daher genügt es, die Federsteifigkeitsmatrix mit der auf die volle Spaltenzahl erweiterten Stützstellentransformationsmatrix von beiden Seiten zu multiplizieren.

$$\mathbf{K}_f^* = \mathbf{S}_{l,g}^T \cdot \mathbf{K}_f \cdot \mathbf{S}_{l,g} \quad (8.42)$$

Auf die Belegung der Hauptdiagonalelemente der Leerzeilen und -spalten kann verzichtet werden, da dies bereits bei den Segmentsteifigkeitsmatrizen geschehen ist.

## 8.7 Der Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Mit den vorliegenden Stabsteifigkeitsmatrizen aus Gleichung (8.40) und den Federsteifigkeitsmatrizen aus Gleichung (8.42) wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix aufgebaut. Da es vorkommen kann, dass die Reihenentwicklung wegen zu großer Feldlänge nicht konvergiert, ist es sinnvoll diese Felder intern zu unterteilen. Diese internen Felder werden als Segmente bezeichnet. Im günstigsten Fall ist die Anzahl der Segmente gleich der Anzahl der Felder. Wird beim Aufbau der Steifigkeitsmatrix für ein Segment festgestellt, dass die Polynomentwicklung divergiert, so wird die Segmentzahl für dieses Feld um eins erhöht und für die kürzere Stablänge erneut die Reihe entwickelt. Diese Schritte werden solange wiederholt bis die Lösung der Differentialgleichung stabil ist.

Die Anzahl der aufzustellenden Steifigkeitsmatrizen ergibt sich nach Theorie 2. Ordnung aus der Summe der Segmente in allen Feldern.

$$n_{Seg,ges} = \sum_{n=1}^{n_F} n_{Seg,F} \quad (8.43)$$

Nach Theorie 1. Ordnung sind für die Segmente eines Feldes vor der Einarbeitung der Lagerungsbedingungen (am ersten oder letzten Segment eines Feldes) die Steifigkeitsmatrizen identisch. Dies kann beim Aufstellen der Gesamtsteifigkeitsmatrix benutzt werden. Ganz gleich, wie viele Segmente ein Feld hat, die Stabsteifigkeitsmatrix muss bei Berechnung nach Theorie 1. Ordnung nur einmal aufgestellt werden.

In Abbildung 8.2 ist das Belegungsmuster für volle und für die bandsymmetrische Struktur dargestellt. Die Umrandungen beinhalten jeweils ein Feld, die „Treppenstufen“ zeigen die Grenzen der Segmente an.

Unter Ausnutzung der Symmetrie ergibt sich eine Bandsymmetrische Struktur mit  $4m$  Spalten und  $4m \cdot (n_{Seg,ges} + 1)$  Zeilen. Die Zahl der Unbekannten und der Platzbedarf der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_g$  wachsen demnach linear mit der Anzahl der Segmente.

Für die Lösung dieses bandsymmetrischen Gleichungssystems wurde eine Dreieckszerlegung nach Cholesky programmiert, die auch in der Lage ist, negative Hauptdiagonalelemente korrekt zu behandeln. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass rein imaginäre Zeilen

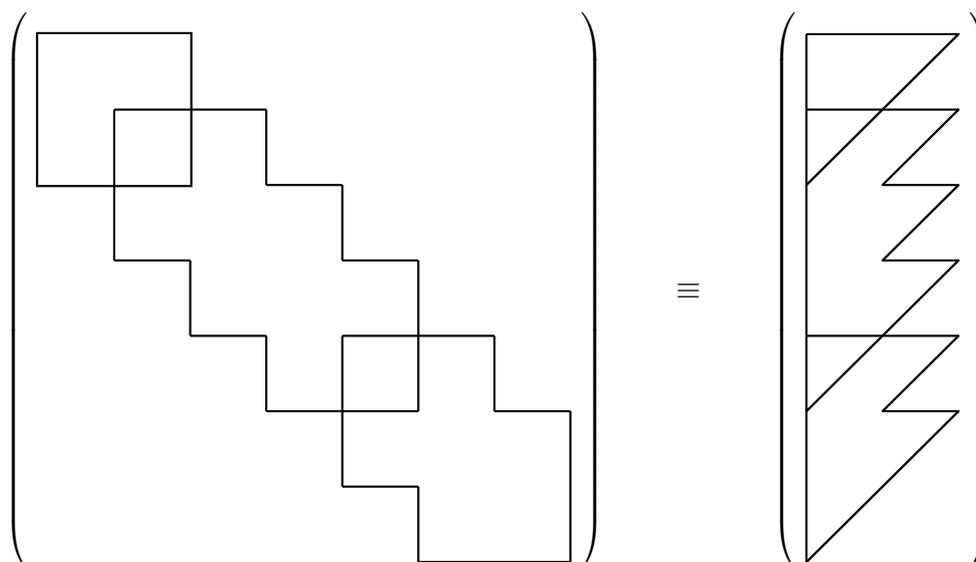


Abbildung 8.2: Belegung einer Gesamtsteifigkeitsmatrix für 3 Felder mit 1, 3 und 2 Segmenten im vollen und bandsymmetrischen Speichermodus

und Spalten entstehen. Um diese zu erkennen, wird das Vorzeichen des Hauptdiagonalelementes verwendet, das somit nur noch Steuerungsfunktion besitzt. Die Anzahl der aufgefundenen negativen Hauptdiagonalelemente wird zusammen mit der Determinante an das aufrufende Programm zurückgegeben. Die Determinante wird in zwei Zahlen ( $d_r$  und  $d_i$ ) zerlegt dargestellt. Der Zahlenwert ergibt sich zu  $d_r \cdot 10^{d_i}$ . Dies ist vor allem bei der Berechnung nach Theorie 2. Ordnung von Bedeutung, da es sehr leicht geschehen kann, dass der erste oder höhere Eigenwerte überschritten werden. Falls zu diesen Eigenwerten globale Verschiebungen gehören, werden sie mit negativen Hauptdiagonalelementen sichtbar. Es gibt allerdings auch Fälle bei denen zwei Eigenwerte übersprungen werden, ohne dies auf diese Art und Weise zu zeigen, z. B. bei Beulproblemen. Wie dieses Problem gelöst werden kann wird später in Kapitel B.1.2 gezeigt.

Durch die Zerlegung des bandsymmetrischen Gleichungssystems in eine linke untere und rechte obere Dreiecksmatrix

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{L}_g \cdot \mathbf{R}_g \quad (8.44)$$

bleibt für diese Teilmatrizen die Bandstruktur erhalten. Anders als bei einer kompletten Inversion, die normalerweise zu einer vollbelegten quadratischen Matrix führt und somit weitgehend den Vorteil der Bandstruktur zunichte macht.

Um die später erstellten rechten Seiten zu lösen, werden sie formal mit der Inversen von  $\mathbf{L}_g$  multipliziert, ein Vorgang, der darin besteht, auf die rechten Seiten die gleichen Transformationen anzuwenden wie auf die Bandmatrix. Danach werden die Unbekannten von unten her zurückgerechnet.

## 8.8 Die Rückrechnung der Schnittgrößen

Nachdem die Lösungen aus dem globalen System vorliegen, werden sie aus dem globalen Lösungsvektor herausgenommen und mittels der Matrix der globalen-lokalen Relationen auf lokale, stabbezogene Verformungsgrößen transformiert. Mit der Inversen der Randgrößen  $\mathbf{R}_{01}^{-1}$  werden alsdann für jedes Segment die freien Koeffizienten gemäß Gleichung (8.13) ermittelt und mit diesen bekannten Randgrößen werden die Polynome der Verformungen entwickelt. Mit Hilfe dieser Polynome werden an den gewünschten Stellen die Weg- und Schnittgrößen innerhalb der Segmente berechnet und in der Ergebnisdatei abgespeichert.

## 8.9 Die Berechnung der Lagerreaktionen

Zur Berechnung der Lagerreaktionen werden alle Schnittgrößen und Kräfte benötigt, die an der virtuellen Verrückungsfigur Arbeit leisten. Dazu gehören auch die Kräfte aus der elastischen Lagerung mittels Federn. Die Schnittgrößen setzen sich aus den Zustandseinzellasten, den auf Zustandslasten umgerechneten Knoteneinzellasten inklusive der Federkräfte an der Stützstelle sowie der Summe (bei Vorzeichen nach WGV) der Stabend-schnittgrößen links und rechts der Stützstelle  $n$ . Dabei sind:

${}^kP$  Zustandseinzellasten zu  ${}^kV$  bzw.  ${}^kV'$ .

$\mathbf{P}_r$  Einzellasten am Knoten  $r$  mit den Komponenten  $P_{x,r}$ ,  $P_{y,r}$ ,  $P_{z,r}$ .

${}^k\mathbf{v}_r$  Der Verschiebungsvektor am Knoten  $r$  im Zustand  $k$ .

$\mathbf{w}_{e,n}$  Der Schnittgrößenvektor am Segmentende an der Stützstelle  $n$ . Er ergibt sich aus der unteren Hälfte der Summe aus  $\mathbf{w} + \mathbf{w}_0$  der Gleichungen (8.14) und (8.16)

$\mathbf{w}_{b,n+1}$  Der Schnittgrößenvektor am Segmentanfang an der Stützstelle  $n$ . Er ergibt sich aus der oberen Hälfte der Summe aus  $\mathbf{w} + \mathbf{w}_0$  der Gleichungen (8.14) und (8.16)

Dabei sind in  $\mathbf{w}_{e,n}$  und  $\mathbf{w}_{b,n+1}$  bereits die Anteile aus eventuellen Lagerverschiebungen enthalten. Mit diesen Anteilen wird der Schnittgrößenvektor der Stützstelle  $n$  berechnet:

$$\mathbf{w}_y = \sum_k ({}^kP + \sum_g \mathbf{P}_{r,g} {}^k\mathbf{v}_r) + \mathbf{w}_{e,n} + \mathbf{w}_{b,n+1}, \quad (8.45)$$

und die Anwendung des P.d.v.V., d.h. die Berechnung der Arbeit der Stützstellen-Schnittgrößen an den virtuellen Verrückungen aller Lager liefert den Vektor der Lagerkräfte:

$$\mathbf{L}_h = \mathbf{S}_{l,v}^T \cdot \mathbf{w}_y. \quad (8.46)$$

Der aus der Lagerungsbedingung über  $\mathbf{S}_{l,g} \cdot \mathbf{Y}$  stammende Teil der virtuellen Verrückung kann dabei außer Acht gelassen werden, da er als Lagerungsbedingung keinen Arbeitsanteil liefern kann/darf.

## 8.10 Die Lösung des Verzweigungsproblems

Um die Verzweigungslast eines Tragsystems zu bestimmen, ist es erforderlich, das transzendente Problem

$$|\mathbf{K}_{g,II}(\nu)| = 0 \quad (8.47)$$

für den Lastfaktor  $\nu$  zu lösen. Dies wird üblicherweise mit einer linearen Erhöhung des Faktors  $\nu$  und, nach Auffinden eines Nulldurchgangs, mit anschließender Intervallschachtelung erreicht. Die Nachteile, die mit dieser Vorgehensweise verbunden sind, sind bekannt. Da das Aufstellen der Gesamtsteifigkeitsmatrix den wesentlichen Anteil des Berechnungsaufwandes darstellt, wurde ein Weg gesucht um die Abschätzung des Eigenwertes sicherer und schneller zu gestalten. Ein möglicher Weg, der allerdings hier nicht beschränkt wurde, besteht darin, die Wertepaare  $(\nu_i, |\mathbf{K}_{g,II}(\nu_i)|)$  zur Aufstellung eines Polynoms zu verwenden mit dem dann eine Nullstellenberechnung durchgeführt werden kann und deren Ergebnis dann den nächsten Schätzwert für die Verzweigungslast liefert. Das Problem dieser Vorgehensweise besteht aber darin, die ersten Wertepaare zu erhalten.

Das hier verwendete Verfahren basiert im Wesentlichen auf einer Eigenwertberechnung im Zusammenwirken mit einer Intervallschachtelung und wird nachfolgend beschrieben. Die Gleichung (8.47) lässt sich als Summe zweier Anteile formulieren. Das sind einerseits die Steifigkeiten nach Theorie 1. Ordnung sowie die Abtriebsterme aus 2. Ordnung.

$$\mathbf{K}_{g,II}(\nu) = \mathbf{K}_{g,I} + \Delta\mathbf{K}_{g,II}(\nu) \quad (8.48)$$

Diese Abtriebsterme sind immer dann, wenn die Verformungen von der Stabsehne vernachlässigt werden können, linear von dem Laststeigerungsfaktor abhängig. Aus der vorherigen Gleichung wird dann

$$\mathbf{K}_{g,II}(\nu) = \mathbf{K}_{g,I} + \nu \cdot \Delta\mathbf{K}_{g,II}(1) \quad (8.49)$$

und in diesem besonderen Falle können Verzweigungslast und Eigenform durch Lösung des allgemeinen Eigenwertproblems

$$\left(\mathbf{K}_{g,I} + \nu \cdot \Delta\mathbf{K}_{g,II}(1)\right) \mathbf{v}_g = 0 \quad (8.50)$$

ermittelt werden. Sind die Abweichungen von der Stabsehne nicht zu vernachlässigen, so stellt dieser Eigenwert die Nullstelle dar, die man durch Anlegen der Tangente an den Determinantenverlauf erhält. Das bedeutet, dass man den Eigenwert dann mit größter Vorsicht zu behandeln hat, wenn er groß ist.

Mit diesem Verfahren lassen sich alle Eigenwerte und -formen in der Nähe des Nulldurchgangs sicher berechnen, was bei einer Nullstelleniteration nicht der Fall ist. Durch Verwendung der Vektoriteration beim Allgemeinen Eigenwertproblem lässt sich der Berechnungsaufwand wesentlich verringern, da üblicherweise nur der niedrigste oder die beiden niedrigsten Eigenwerte von Belang sind. Dieses Verfahren liefert jedenfalls für den linearen Sonderfall immer den niedrigsten Eigenwert.

Liegt der allgemeine Fall vor, so gilt wiederum in der Nähe der Nullstelle (die Näherung sei  $\nu^*$ )

$$\left(\mathbf{K}_{g,I} + \gamma \cdot \Delta\mathbf{K}_{g,II}(\nu^*)\right) \mathbf{v}_g = 0. \quad (8.51)$$

Hierbei ist jedoch eine Iteration erforderlich, die dann abgebrochen werden kann, wenn  $\gamma = 1$  erreicht ist. Die nächste Näherung für die Verzweigungslast wird rekursiv mit

$$\nu_m^* = \gamma \cdot \nu_{m-1}^* \quad (8.52)$$

berechnet.

Der Nachteil bei diesem Lösungsansatz liegt nun darin, dass die Matrix der Abtriebskräfte nicht bekannt ist und erst aus der Differenz zwischen  $\mathbf{K}_{g,II}(\nu^*)$  und  $\mathbf{K}_{g,I}$  berechnet werden müsste. Um diese Differenzbildung zu vermeiden wird nachfolgende Umformung der Gleichung (8.51) vorgenommen:

$$\left( \mathbf{K}_{g,I} + \gamma \cdot (\mathbf{K}_{g,II}(\nu^*) - \mathbf{K}_{g,I}) \right) \mathbf{v}_g = 0 \quad (8.53)$$

$$\left( (1 - \gamma) \cdot \mathbf{K}_{g,I} + \gamma \cdot \mathbf{K}_{g,II}(\nu^*) \right) \mathbf{v}_g = 0 \quad (8.54)$$

$$\left( \mathbf{K}_{g,I} - \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}} \cdot \mathbf{K}_{g,II}(\nu^*) \right) \mathbf{v}_g = 0 \quad (8.55)$$

$$\left( \mathbf{K}_{g,I} - \lambda \cdot \mathbf{K}_{g,II}(\nu^*) \right) \mathbf{v}_g = 0, \quad (8.56)$$

mit dem Koeffizienten des Matrixeigenwertproblems

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}}. \quad (8.57)$$

Ist dieser Koeffizient (Eigenwert) bekannt, so kann damit die nächste Näherung des Verzweigungslastfaktors wiederum rekursiv

$$\nu_m^* = \nu_{m-1}^* \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}} \quad (8.58)$$

berechnet werden. Die Differenz zwischen  $\nu_m^*$  und  $\nu_{m-1}^*$  wird genau dann zu Null, wenn der Eigenwert  $\lambda$  gegen unendlich geht.

Da diese Form der Iteration nicht immer unmittelbar die Verzweigungslast liefert, wurde eine Annäherung gewählt, die nach der bisherigen Praxis stets zur niedrigsten Verzweigungslast führt. Zunächst einmal ist die Lösung des allgemeinen Matrixeigenwertproblems mit Hilfe der Vektoriteration nicht möglich. Dieses Verfahren ist nur für die spezielle Form

$$\left( \mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E} \right) \mathbf{X} = 0 \quad (8.59)$$

verwendbar. Durch die Multiplikation der Gleichung (8.56) mit der Inversen von  $\mathbf{K}_{g,II}(\nu^*)$  erhält man

$$\left( \mathbf{K}_{g,II}^{-1}(\nu^*) \mathbf{K}_{g,I} - \lambda \cdot \mathbf{E} \right) \mathbf{v}_g = 0, \quad (8.60)$$

und hat somit die Möglichkeit die Vektoriteration einzusetzen. Sie beruht auf dem Phänomen, dass sich durch wiederholte Anwendung der Rechenoperation

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_{j-1} \quad (8.61)$$

die Eigenform in  $\mathbf{v}_j$  nach und nach durchsetzt, bis sich keine Veränderung in der Eigenform mehr ergibt. Diese Multiplikation geschieht hier in zwei Stufen. Zunächst wird die

Steifigkeitsmatrix nach Theorie 1. Ordnung mit dem Vektor der Eigenform multipliziert. Der daraus entstandene Vektor dient als rechte Seite für die Gesamtsteifigkeitsmatrix nach Theorie 2. Ordnung und liefert nach Lösung des Gleichungssystems den nächsten iterierten Eigenvektor. So können die Bandstrukturen der Steifigkeitsmatrizen bzw. ihrer triangulierten Form erhalten bleiben.

Aus der Dreieckszerlegung der Systemmatrix Theorie 2. Ordnung ist jedenfalls die Determinante und die Anzahl der negativen Hauptdiagonalelemente bekannt, so dass mit dem Auffinden solcher Hauptdiagonalelemente eine hinreichende Aussage über eine Obergrenze für die niedrigste Verzweigungslast vorliegt.

Um nun eine möglichst sichere Untergrenze zu finden, wird der aus der ersten Eigenwertlösung stammende Näherungswert für die niedrigste Verzweigungslast auf  $\frac{1}{10}$  reduziert und damit die zweite Eigenwertlösung berechnet. Diese liefert bei gängigen Problemen immer die Bestätigung, dass der Eingangswert zu einer Untergrenze gehört. Anderenfalls werden die nächsten Schätzwerte solange auf  $\frac{1}{10}$  reduziert, bis mit Sicherheit ein unterer Grenzwert gefunden ist. In den nachfolgenden Iterationsschritten werden die anzusetzenden Näherungen  $\nu_m^*$  unter Verwendung der  $\nu_{m-1}^*$  so zu den Grenzen verschoben, dass beim Schritt von  $\nu_{m-1}^*$  nach  $\nu_m^*$  möglichst nicht mehr als ein Verzweigungspunkt überschritten wird. Auf diese Art erhält man innerhalb von ca. 8-12 Iterationen die niedrigste Verzweigungslast des Systems.

Die Eigenformen werden am Ende der Iteration durch Vorgabe einer beliebigen rechten Seite berechnet. Hier wird die Eigenschaft der Systemmatrix ausgenutzt, in der Nähe der Verzweigungslast diejenigen Lastkomponenten, die zur Eigenform gehören, in viel höherem Maße zu verstärken als die dazu orthogonalen Komponenten. Die so berechneten Knickbiegelineien sind von wesentlich besserer Qualität als die Eigenformen aus der Vektoriteration. Der Ergebnisvektor wird auf den Maximalwert von 1 normiert und anschließend, wie beim Spannungsproblem, dazu benutzt die Verformungsresultanten und deren Ableitungen zu berechnen. Auch diese Ergebnisse werden in der Ergebnisdatei abgespeichert und können dann mit dem Ausgabeprogramm graphisch dargestellt werden. Das Ausgabeprogramm ermöglicht es, sowohl die Verformungsresultanten als auch die Verformungsfiguren darzustellen.

# 9 Die Arbeitsausdrücke

Nachfolgend werden alle Arbeitsausdrücke (Steifigkeiten) zusammengestellt, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden. Falls sich durch das Weglassen einzelner Verformungsansätze Veränderungen ergeben, so wird dies durch entsprechende Anmerkungen erläutert. Die Terme werden immer für eine Scheibe angegeben. Ferner werden die Definitionen für die symmetrischen und antisymmetrischen Anteile aus den Gleichungen (3.3) und (4.2) verwendet, da sie einfachere Ausdrücke liefern. Fasst man sie zusammen, so ergibt sich

$$\bar{[\ ]} = 0.5 ([ ]_e + [ ]_b) \quad (9.1)$$

$$\hat{[\ ]} = 0.5 ([ ]_e - [ ]_b). \quad (9.2)$$

## 9.1 ... nach Theorie 1. Ordnung

Nach Theorie 1. Ordnung handelt es sich um wirkliche Steifigkeiten, die auf Grund von Verformungen entstehen. Scheiben- und Plattenanteile werden getrennt angegeben.

### 9.1.1 Die Scheibenanteile

Die Herleitung dieser Anteile wurde in Kapitel 3.3 behandelt.

$${}^{kj}c^M = \frac{bt}{1-\mu^2} \left( k_{\bar{u}} j_{\bar{u}} + \frac{1-\mu^2}{3} k_{\hat{u}} j_{\hat{u}} \right) \quad (9.3)$$

Bei fehlender Umfangsdehnung muss der Term  $(1 - \mu^2)$  durch 1 ersetzt werden. Die Formel kann ansonsten verwendet werden.

$${}^{kj}d_1^M = bt \left( \left( \frac{2}{b} k_{\hat{u}} + k_{\bar{f}_s} \right) \left( \frac{2}{b} j_{\hat{u}} + j_{\bar{f}_s} \right) + \frac{1}{3} k_{\hat{f}_s} j_{\hat{f}_s} \right) \quad (9.4)$$

Bei fehlender Schubverformung verschwindet dieser Term. Bei fehlender Umfangsdehnung verschwindet der 2. Term (mit  $\hat{f}_s$ ).

$${}^{kj}d_2^M = \frac{4\mu t}{1-\mu} k_{\hat{f}_s} \cdot j_{\bar{u}} \quad (9.5)$$

Bei fehlender Umfangsdehnung verschwindet dieser Term.

$${}^{kj}b^M = \frac{4btE}{1-\mu^2} \cdot \frac{1}{b^2} k_{\hat{f}_s} j_{\hat{f}_s} \quad (9.6)$$

Bei fehlender Umfangsdehnung verschwindet dieser Term.

### 9.1.2 Die Plattenanteile

Die Herleitung dieser Anteile wurde in Kapitel 4.3 behandelt.

$${}^{kj}c^B = \frac{bt^3}{12(1-\mu^2)} \left( {}^{k\bar{f}j\bar{f}} + \frac{b}{6} ({}^{k\bar{f}j\hat{\varphi}} + {}^{k\hat{\varphi}j\bar{f}}) + \frac{b^2}{30} {}^{k\hat{\varphi}j\hat{\varphi}} \right. \\ \left. + \frac{17b^2}{140} {}^{k\vartheta j\vartheta} - \frac{3b^2}{140} ({}^{k\vartheta j\bar{\varphi}} + {}^{k\bar{\varphi}j\vartheta}) + \frac{b^2}{210} {}^{k\bar{\varphi}j\bar{\varphi}} \right) \quad (9.7)$$

$${}^{kj}d_1^B = \frac{bt^3}{3} \left( \frac{1}{3} {}^{k\hat{\varphi}j\hat{\varphi}} + \frac{1}{5} {}^{k\bar{\varphi}j\bar{\varphi}} - \frac{1}{5} ({}^{k\bar{\varphi}j\vartheta} + {}^{k\vartheta j\bar{\varphi}}) + \frac{6}{5} {}^{k\vartheta j\vartheta} \right) \quad (9.8)$$

$${}^{kj}d_2^B = \frac{\mu bt^3}{6(1-\mu)} \left( \frac{2}{b} {}^{k\hat{\varphi}j\bar{f}} + \frac{1}{3} {}^{k\hat{\varphi}j\hat{\varphi}} + \frac{1}{5} {}^{k\bar{\varphi}j\bar{\varphi}} - \frac{1}{5} (6 {}^{k\bar{\varphi}j\vartheta} + {}^{k\vartheta j\bar{\varphi}}) + \frac{6}{5} {}^{k\vartheta j\vartheta} \right) \quad (9.9)$$

Dieser Anteil ist unsymmetrisch, daher fehlt das gemischte Glied  ${}^{k\bar{f}j\hat{\varphi}}$ .  
Siehe auch Gleichung (5.27) zur Definition des Drillwiderstands

$${}^{kj}b^B = \frac{Et^3}{b(1-\mu^2)} \left( \frac{1}{3} {}^{k\hat{\varphi}j\hat{\varphi}} + {}^{k\bar{\varphi}j\bar{\varphi}} - {}^{k\bar{\varphi}j\vartheta} - {}^{k\vartheta j\bar{\varphi}} + {}^{k\vartheta j\vartheta} \right) \quad (9.10)$$

### 9.1.3 Die Federanteile

Die Federanteile der Steifigkeiten wurden in Kapitel 5.3 erwähnt.

$${}^{kj}b_s^F = k_{D,s} {}^{k\vartheta_s j\vartheta_s} \quad (9.11)$$

Scheibendrehbettung der Scheibe  $s$

$${}^{kj}b_r^F = k_{D,r} {}^{k\varphi_r j\varphi_r} \quad (9.12)$$

$$+ k_f ({}^{k\nu_r \cos \alpha} + {}^{kw_r \sin \alpha}) ({}^{j\nu_r \cos \alpha} + {}^{jw_r \sin \alpha})$$

Drehbettung und Translationsfeder am Knoten  $r$

## 9.2 ... nach Theorie 2. Ordnung

Hierbei handelt es sich um Umlenkterme, die aus Gleichgewicht am verformten System entstehen. Die möglichen Arbeitsterme, die sich bei den vorgestellten Freiheitsgraden ergeben, wurden in Kapitel 6.3 beschrieben. Bei den hier zusammengestellten Formeln wurde auf die Darstellung der Anteile aus den Umfangsverformungen verzichtet.

$$\begin{aligned}
{}^{kj}i_{\kappa_{\sigma}} = & \quad bt \left( {}^k\bar{f}^j\bar{f} + {}^k\bar{f}_s^j\bar{f}_s + \frac{b}{6} ({}^k\bar{f}^j\hat{\varphi} + {}^k\hat{\varphi}^j\bar{f}) + \frac{b^2}{30} {}^k\hat{\varphi}^j\hat{\varphi} \right. \\
& \quad \left. + \frac{17b^2}{140} {}^{k\vartheta}j\vartheta - \frac{3b^2}{140} ({}^{k\vartheta}j\bar{\varphi} + {}^{k\bar{\varphi}}j\vartheta) + \frac{b^2}{210} {}^{k\bar{\varphi}}j\bar{\varphi} \right) i_{\bar{u}} \\
& + bt \left( +\frac{b}{30} ({}^k\bar{f}^j\bar{\varphi} + {}^{k\bar{\varphi}}j\bar{f}) - \frac{b}{5} ({}^k\bar{f}^j\vartheta + {}^{k\vartheta}j\bar{f}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{3b^2}{140} ({}^{k\vartheta}j\hat{\varphi} + {}^{k\hat{\varphi}}j\vartheta) + \frac{b^2}{210} ({}^{k\hat{\varphi}}j\bar{\varphi} + {}^{k\bar{\varphi}}j\hat{\varphi}) \right) i_{\hat{u}}
\end{aligned} \tag{9.13}$$

$$\begin{aligned}
{}^{kj}i_{\kappa_{\tau,g}} = & \quad i_{\tau_{b,g}} \left( -b {}^{k\vartheta}j\bar{f} + \frac{b^2}{30} ({}^k\hat{\varphi} (6 {}^{j\vartheta} - {}^j\bar{\varphi}) - (6 {}^{k\vartheta} - {}^{k\bar{\varphi}}) {}^j\hat{\varphi}) \right) \\
& + \frac{b^2 d i_{\bar{u}}}{i_C} \left( +\frac{b}{60} ({}^{k\bar{\varphi}}j\hat{\varphi} - {}^{k\hat{\varphi}}j\bar{\varphi}) - \frac{b}{420} (7 {}^{k\vartheta}j\hat{\varphi} + {}^{k\bar{\varphi}}j\bar{\varphi}) + \frac{b}{10} ({}^{k\vartheta}j\vartheta - {}^{k\vartheta}j\hat{\varphi}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{b}{140} (9 {}^{k\vartheta}j\vartheta + 5 {}^{k\bar{\varphi}}j\vartheta - 2 {}^{k\vartheta}j\bar{\varphi}) - \frac{1}{6} (3 {}^{k\vartheta}j\bar{f} + {}^{k\hat{\varphi}}j\bar{f}) \right) \\
& + \frac{b^2 d i_{\hat{u}}}{i_C} \left( \frac{1}{30} (6 {}^{k\vartheta} - {}^{k\bar{\varphi}}) {}^j\bar{f} + \frac{3b}{140} (2 {}^{k\vartheta}j\hat{\varphi} - {}^{k\hat{\varphi}}j\vartheta) - \frac{b}{210} (2 {}^{k\bar{\varphi}}j\hat{\varphi} - {}^{k\hat{\varphi}}j\bar{\varphi}) \right)
\end{aligned} \tag{9.14}$$

$${}^{kj}i_{\kappa_{\tau,e}} = i_{\tau_{b,e}} \left( -b {}^{k\vartheta}j\bar{f} + \frac{b^2}{30} ({}^k\hat{\varphi} (6 {}^{j\vartheta} - {}^j\bar{\varphi}) - (6 {}^{k\vartheta} - {}^{k\bar{\varphi}}) {}^j\hat{\varphi}) \right) \tag{9.15}$$

## 9 Die Arbeitsausdrücke

# 10 Zusammenfassung

Zur VTB liegen verschiedene Arbeiten vor, die sich mit unterschiedlichen Ansätzen für die Verformungen beschäftigten. Ziel dieser Arbeit war es, ein Globalsystem zu finden, das den Übergang zwischen unterschiedlichen Freiheitsgraden in einer anschaulichen und einheitlichen Form liefert und zudem keine Einschränkungen auf die Querschnittsform aufweist.

Das dabei entstandene Querschnittswerteprogramm QEP lässt dem Benutzer freie Wahl bei dem Ansatz von Verformungsmöglichkeiten und deckt dabei, auch durch die fast unbegrenzten Möglichkeiten Querschnitte zu lagern, alle in der Praxis denkbaren Fälle prismatischer Strukturen ab. Dabei werden beliebige Verzweigungen ebenso unproblematisch behandelt wie geschlossene Zellen. Da die bislang bestehenden Programme zur Lösung der Differentialgleichungen die Erweiterungen der Freiheitsgrade wegen der erforderlichen diskreten Formulierung der Lagerungsbedingungen noch nicht richtig behandeln können, wurde lediglich für die „klassischen“ Freiheitsgrade der VTB eine umfangreiche Anwendung des Programms vorgenommen. Das Querschnittswerteprogramm liegt derzeit in einer C-Fassung (entwickelt unter UNIX<sup>TM</sup>) und einer neuen Java<sup>TM</sup>-Version (die unter einer graphischen Oberfläche Eingabe, Berechnung und Ausgabe sowohl für Querschnittswerte als auch für die Lösung des Längssystems mit dem Reihenansatz integriert) vor.

Die Anwendung dieser Querschnittswerte ist für die Freiheitsgrade Verwölbungen, Plattenfreiheitsgrade und Knotenverdrehungen mit den bereits bestehenden Differentialgleichungslösern möglich.

Für die Lösung der Differentialgleichungen unter Anwendung der Freiheitsgrade Schubverformungen und Umfangsdehnungen wurde das Weggrößenverfahren in Anlehnung an Hanf [11] allerdings mit dem Reihenansatz als Lösungsfunktion ausgewählt. Ein weiterer Unterschied liegt in der Behandlung der Lagerungsbedingungen, die zwar weiterhin über die Zustände formuliert werden können, jedoch zusätzlich die Möglichkeit bietet diskrete Lager wie z. B. Pendelstäbe oder Gabellager zu wählen. Bei Berücksichtigung von Schubverformungen müssen die Lagerungsbedingungen über diskrete Lager formuliert werden. Durch die systematische Anwendung des aus der Technischen Biegetheorie bekannten Produktansatzes für die Verwölbungen ergeben sich bei der Lösung der Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der elastischen Schubfreiheitsgrade Rangabfälle bei der Beschreibung der Verformungen, die jedoch durch Einführung von fiktiven Verformungslagern  ${}^kV = 0$  einfach zu behandeln sind.

Mit diesem Lösungsverfahren lassen sich die Verformungsfunktionen, soweit sie konvergieren, numerisch exakt berechnen. Divergiert die Reihenentwicklung, so werden die Stäbe intern geteilt, bis sich Konvergenz einstellt. Bei der Lösung von Problemen nach Theorie 2. Ordnung werden die Vorbelastungen durch Polynome frei wählbaren Grades approximiert und bei der Lösung numerisch exakt behandelt. Die durchgeführten Vergleichsrechnungen zeigen sehr gute Übereinstimmung mit bekannten Lösungen.

## 10 Zusammenfassung

# A Beispiele

Die entwickelten Programme wurden an einer Vielzahl von Beispielen getestet. Dabei hat sich herausgestellt, dass, wie aufgrund des dort ebenso verwendeten Weggrößenverfahrens zu erwarten ist, die Ergebnisse nach Theorie 1. und (für konstante Vorlasten) 2. Ordnung mit dem, auf die hier verwendeten Querschnittswerte angepassten, Programm **GSL** [11] praktisch exakt übereinstimmen. Auf die Darstellung dieser Ergebnisse soll hier verzichtet werden.

Die meisten der aufgeführten Beispiele orientieren sich an aus der Literatur bekannten, zum Teil sehr einfachen, Systemen um so einerseits die Ergebnisse leichter verifizieren zu können und andererseits den Anwendungsbereich der Programme darzulegen.

## A.1 Das Kipp-Problem am Beispiel eines HE 120 A

Für eine Reihe von einfachen Belastungen und doppeltsymmetrischen Querschnitten sind in der DIN 18800 Teil 2 [6] die Näherungslösungen für das Kipp-Problem gegeben. Sie werden nachfolgend an einem Einfeldträger aus dem Walzprofil **HE 120 A** mit einer Feldlänge von  $\ell = 300$  cm gegengerechnet. Es handelt sich dabei um folgende Fälle für den Momentenverlauf mit den angegebenen Lasten:

1. Der über die Stablänge konstante Momentenverlauf ( $-{}^2W_b = {}^2W_e = 20.0$  kNm)
2. Der lineare Momentenverlauf aus einem Randmoment ( ${}^2W_e = 20.0$  kNm)
3. Der lineare Momentenverlauf aus Einzellast in Feldmitte ( $\Delta {}^2Q_m = 26.6\bar{6}$  kN)
4. Der parabolische Momentenverlauf aus Streckenlast ( ${}^2q = 17.7\bar{7}$  kN/m)

die zu einem maximalen Stabmoment von  ${}^2W_0 = 20.0$  kNm (Biegemoment um die starke Achse) führen. In der Norm wird außerdem noch unterschieden zwischen Lastangriff im Schwerpunkt bzw. am Ober- bzw. Untergurt. Die Vergleichsrechnung erstreckt sich auf alle o.g. Verläufe mit Angriff der Last im Schwerpunkt. Die beiden Lager sind gleichzeitig Festhaltungen gegenüber dem Verdrehzustand (Gabellager). Die Berechnungen wurden zunächst mit den klassischen Freiheitsgraden der VTB, den Wölb- und den Plattenfreiheitsgraden ( $u, p$ ) und danach mit der Ergänzung um die Schubfreiheitsgrade ( $\gamma$ ) durchgeführt. Die graphischen Darstellungen der Querschnittswerte sind in Abbildungen A.3 und A.4, die numerischen Ergebnisse ohne Schubfreiheitsgrade in Tabelle A.3 dargestellt. Die Vergleichsrechnung nach DIN 18800 beruht auf den Querschnittswerten dieser Tabelle.

Zur Berechnung mit den Freiheitsgraden  $u, p$  wurden die Zustände 2, 3 und 4 ausgewählt. Um den Einfluss der  $K_T$ -Werte kenntlich zu machen, wurden zusätzliche Berechnungen für die Momentenverläufe 2, 3 und 4 durchgeführt, ohne diese Umlenkanteile anzusetzen. Die Berechnung mit dem zusätzlichen Schubfreiheitsgrad  $\gamma$  erfolgte mit den

## A Beispiele

Einheitszuständen 2, 3, 4, 6, 7, 8 und 9. Für die Verzweigungsberechnungen wurden Approximationspolynome vom Grad  $n_A = 4$  gewählt, die die Verformungen unter einer Gleichstreckenlast exakt beschreibt. Dies gilt auch für die Berechnung mit Schubfreiheitsgraden, da diese Verformungsanteile affin zur Querkraft und daher von geringerem Rang sind.

Die Durchbiegungen des Trägers nach Theorie 1. Ordnung in Feldmitte sind in Tabelle A.1 zusammengestellt. Beim ersten Momentenverlauf war auf Grund der fehlenden

| Fhg. \ M-Fall | 1     | 2     | 3     | 4     |
|---------------|-------|-------|-------|-------|
| u,p           | 1.816 | 0.908 | 1.210 | 1.513 |
| u,p,g         | 1.816 | 0.908 | 1.260 | 1.563 |

Einheiten in [cm].

Tabelle A.1: Durchbiegungen in Feldmitte – HE 120 A,  $\ell = 300$  cm

Querkraft keine Schubfluss zu erwarten. Momentenverlauf 2 liefert ebenfalls keinen Schubanteil zur Durchbiegung – hier erfährt der Steg eine konstante Gleitung, die sich in einer Schubverwölbung über den Träger niederschlägt. Die letzten beiden Momentenverläufe zeigen erwartungsgemäß einen bei der Trägerlänge geringen Schubfluss, der eine Vergrößerung der Durchbiegung um 4.1 % bzw. 3.3 % bewirkt.

Tabelle A.2 zeigt die Ergebnisse der Verzweigungsberechnung. Die Berechnung mit allen Umlenkeinflüssen zeigt sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der TB. Die Verzweigungslasten für den Träger mit Schubverformung sind wegen der geringeren Steifigkeit des Querschnitts kleiner als beim Träger ohne Schubfreiheitsgrad. Betrachtet man beim Momentenverlauf 3 den Verlauf der Spannungen in Feldmitte etwas genauer, so ist zu erkennen, dass sich die Längsspannungen infolge der elastischen Schubverformungen zum Steg hin konzentrieren. Sie liegen dort bei  $61.74 \text{ kN/cm}^2$ . Dies beruht auf der Mitwirkung des Zustands 6 bei der Lastabtragung. Abbildung A.2 zeigt die Verformungsresultanten dieses Lastfalls. Neben Zustand 6 ist auch Zustand 7 vertreten, der die Schubverformung des Steges bewirkt. Am Rand der Flansche liegt die Verzweigungsspannung bei  $56.92 \text{ kN/cm}^2$ .

Die Eigenform (Zustandsgrößen) für den linearen Momentenverlauf 3 sind in Abbildung A.1 dargestellt. Sie setzt sich zusammen aus einer Verformung im Sinne der Biegung um die schwache Achse und einer Verdrehung, so dass der Steg an seinem unteren Ende fast gerade bleibt.

| M-Fall            | 1             |          | 2             |          | 3             |          | 4             |          |
|-------------------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
| Freiheitsgrade    | $\sigma_{ki}$ | $M_{ki}$ | $\sigma_{ki}$ | $M_{ki}$ | $\sigma_{ki}$ | $M_{ki}$ | $\sigma_{ki}$ | $M_{ki}$ |
| u,p ohne $K_\tau$ |               |          | 84.99         | 94.62    | 142.02        | 158.12   | 94.42         | 105.12   |
| u,p               | 47.10         | 52.44    | 81.05         | 90.24    | 60.79         | 67.68    | 51.90         | 57.78    |
| u,p,g             | 46.99         | 52.32    | 80.76         | 89.92    | 59.84         | 66.62    | 51.72         | 57.58    |
| nach DIN 18800 T2 | 45.69         | 50.87    | 80.87         | 90.03    | 61.68         | 68.67    | 51.17         | 56.97    |

Einheiten in  $[\text{kN/cm}^2]$  und  $[\text{kN m}]$ .

Tabelle A.2: Verzweigungsspannungen und -momente – HE 120 A,  $\ell = 300$  cm

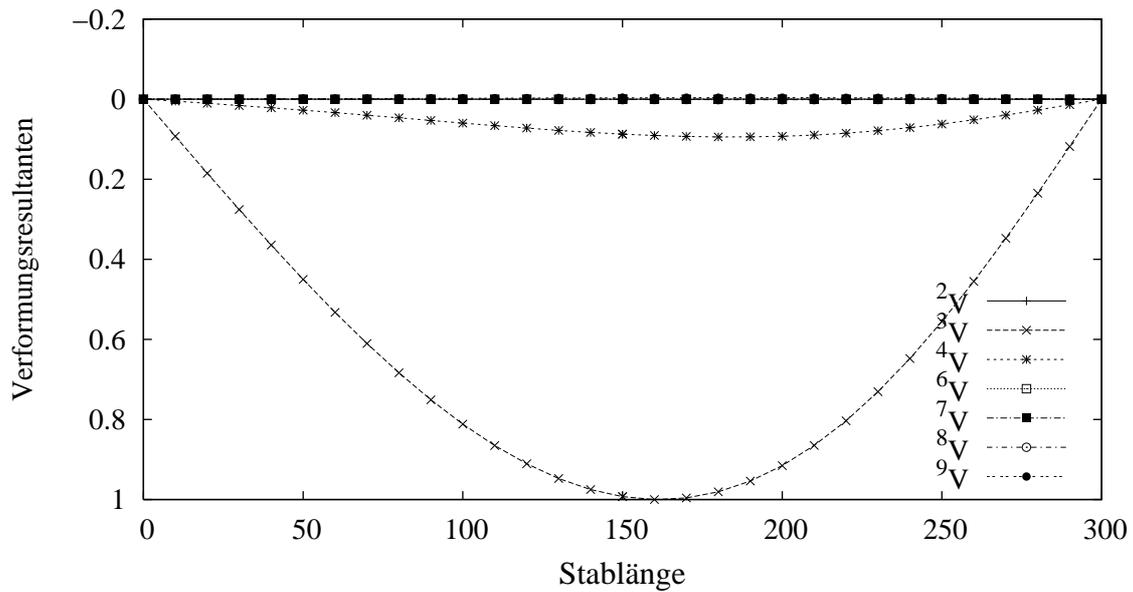


Abbildung A.1: Zustandsgrößen (Eigenform) mit Wölb-, Platten- und Schubfreiheitsgraden unter Momentenverlauf 2.

Zur Zustandsauswahl für die Berechnungsbeispiele ist noch Folgendes zu bemerken: Die Nachrechnung mit Lastangriff im Schwerpunkt erfordert an Verformungsfreiheitsgraden lediglich die „klassischen“ Wölbfreiheitsgrade. Die aus der Berechnung der Querschnittswerte zusätzlich anfallenden Profilverformungszustände (Zustände 5-8) haben auf die Verzweigungslast nur geringen Einfluss und wurden bei der Berechnung weggelassen. Bei der Berechnung mit Schubfreiheitsgraden ist wegen der starken Verkopplung eine Zustandsauswahl mit größter Sorgfalt zu treffen. Allerdings wurde auch hier auf die Berücksichtigung der Profilverformungszustände verzichtet.

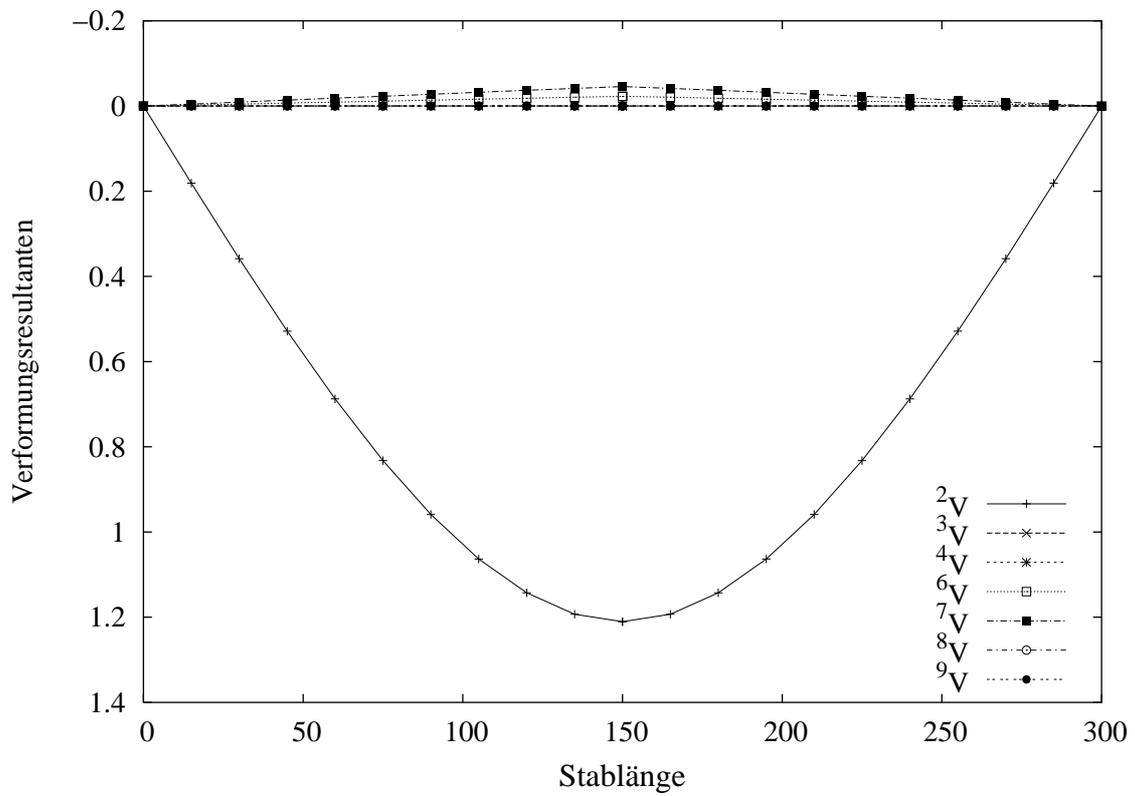


Abbildung A.2: Zustandsgrößen (Th. 1. O.) mit Wölb-, Platten- und Schubfreiheitsgraden unter Momentenverlauf 3.

A.1 Das Kipp-Problem am Beispiel eines HE 120 A

Java2 Vtb.Qep Version 3.00 (c) 1987-2002 by \_ah 21.06.2004 Nr.7421

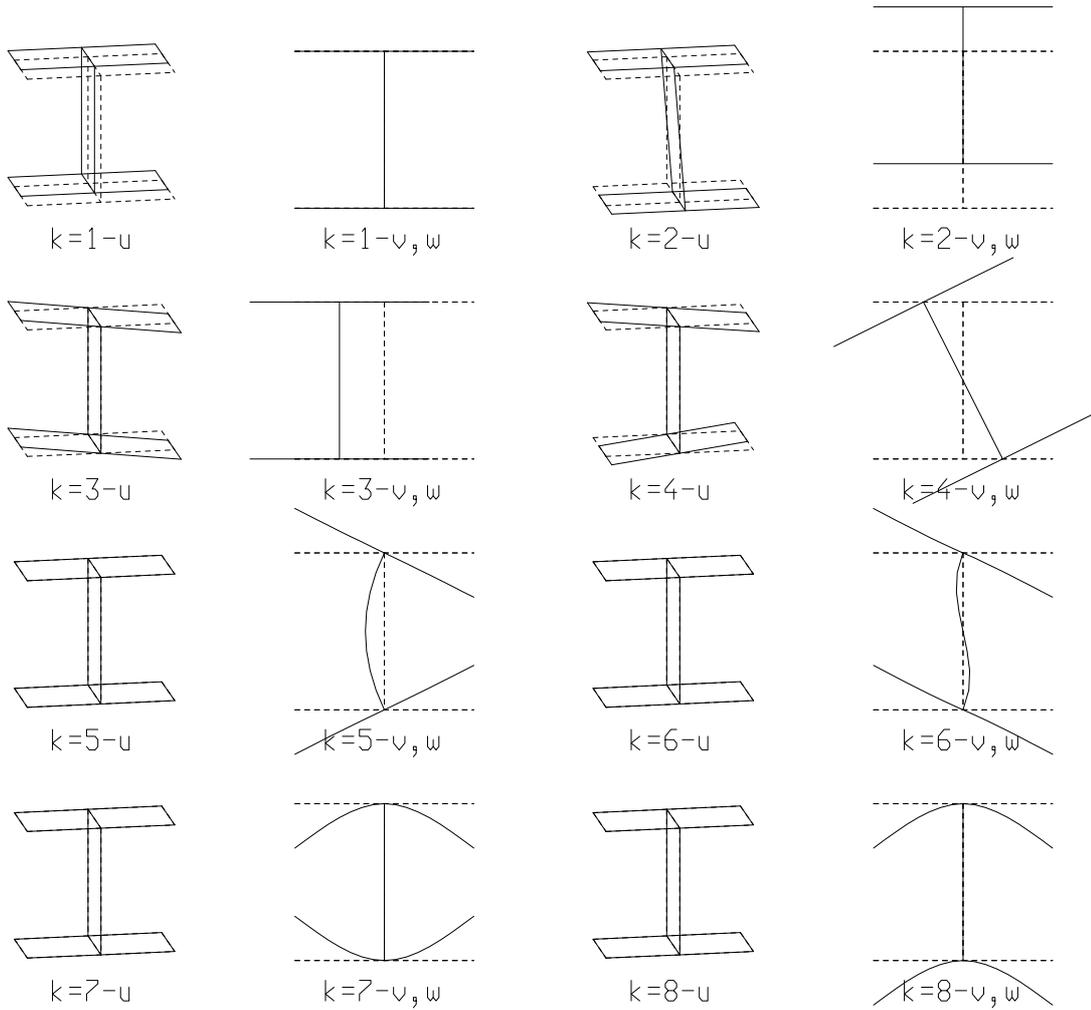


Abbildung A.3: Einheitszustände HE 120 A mit Wölb- und Plattenfreiheitsgraden.

## A Beispiele

Java2 Vtb.Qep Version 3.00 (c) 1987-2002 by \_ah 21.06.2004 Nr. 7421

### QUERSCHNITTSBESCHREIBUNG

Walzprofil HEA-120 /haakh\_1a.xqu/

Der Querschnitt besteht aus 5 Scheiben und 6 Knoten.

Ausgewählte Freiheitsgrade: u p

Anzahl der Einheitszustände: 8

Davon 3 Verschiebungszustände und 1 Schubzustände.

Querschnitt ist nicht gelagert

E-Modul = 21000.00 kN/cm<sup>2</sup>

G-Modul = 8076.92 kN/cm<sup>2</sup>

mue = 0.30

#### Knoten:

| ik | y(ik)  | z(ik)  | is | ib(is) | ie(is) | b(is)  | t(is)  | alpha(is) |
|----|--------|--------|----|--------|--------|--------|--------|-----------|
| 01 | 6.000  | -5.300 | 01 | 1      | 2      | 6.000  | 0.8000 | 180.000   |
| 02 | 0.000  | -5.300 | 02 | 2      | 3      | 6.000  | 0.8000 | 180.000   |
| 03 | -6.000 | -5.300 | 03 | 2      | 5      | 10.600 | 0.5000 | 90.000    |
| 04 | 6.000  | 5.300  | 04 | 4      | 5      | 6.000  | 0.8000 | 180.000   |
| 05 | 0.000  | 5.300  | 05 | 5      | 6      | 6.000  | 0.8000 | 180.000   |
| 06 | -6.000 | 5.300  |    |        |        |        |        |           |

#### Scheiben:

### QUERSCHNITTSWERTE

Einheitszustand k = 1

| Is             | Ik | u/V'     | f-s/V          | f-q/V   | f-t/V    | v/V     | w/V     | phi/V   | Sk/W'   | Sf/W'   |         |
|----------------|----|----------|----------------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1              | 1  | -1.00000 | 0.00000        | 0.00000 | 0.00000  | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |         |
| 2              | 2  | -1.00000 | 0.00000        | 0.00000 | 0.00000  | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |         |
|                | 3  | -1.00000 |                |         |          | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |         |         |         |
| 3              | 2  | -1.00000 | 0.00000        | 0.00000 | 0.00000  | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |         |
|                | 5  | -1.00000 |                |         |          | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |         |         |         |
| 4              | 4  | -1.00000 | 0.00000        | 0.00000 | 0.00000  | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |         |
| 5              | 5  | -1.00000 | 0.00000        | 0.00000 | 0.00000  | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |         |
|                | 6  | -1.00000 |                |         |          | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |         |         |         |
| C <sub>m</sub> | =  | 24.50000 | C <sub>g</sub> | =       | 24.50000 | D       | =       | 0.00000 | B       | =       | 0.00000 |

Einheitszustand k = 2

| Is             | Ik | u/V'      | f-s/V          | f-q/V    | f-t/V     | v/V      | w/V      | phi/V   | Sk/W'    | Sf/W'    |         |
|----------------|----|-----------|----------------|----------|-----------|----------|----------|---------|----------|----------|---------|
| 1              | 1  | -5.30000  | 0.00000        | -1.00000 | 0.00000   | -0.00000 | -1.00000 | 0.00000 | -0.12934 | 0.00000  |         |
| 2              | 2  | -5.30000  | 0.00000        | -1.00000 | 0.00000   | -0.00000 | -1.00000 | 0.00000 | 0.12934  | 0.04311  |         |
|                | 3  | -5.30000  |                |          |           | -0.00000 | -1.00000 | 0.00000 |          |          |         |
| 3              | 2  | -5.30000  | -1.00000       | 0.00000  | -0.00000  | -0.00000 | -1.00000 | 0.00000 | -0.99809 | -0.08623 |         |
|                | 5  | 5.30000   |                |          |           | 0.00000  | -1.00000 | 0.00000 |          |          |         |
| 4              | 4  | 5.30000   | -0.00000       | -1.00000 | 0.00000   | 0.00000  | -1.00000 | 0.00000 | 0.12934  | 0.00000  |         |
| 5              | 5  | 5.30000   | -0.00000       | -1.00000 | 0.00000   | 0.00000  | -1.00000 | 0.00000 | -0.12934 | -0.04311 |         |
|                | 6  | 5.30000   |                |          |           | 0.00000  | -1.00000 | 0.00000 |          |          |         |
| C <sub>m</sub> | =  | 588.95372 | C <sub>g</sub> | =        | 590.07899 | D        | =        | 0.00000 | B        | =        | 0.00000 |

Einheitszustand k = 3

| Is             | Ik | u/V'      | f-s/V          | f-q/V   | f-t/V     | v/V     | w/V      | phi/V   | Sk/W'    | Sf/W'    |         |
|----------------|----|-----------|----------------|---------|-----------|---------|----------|---------|----------|----------|---------|
| 1              | 1  | -6.00000  | -1.00000       | 0.00000 | 0.00000   | 1.00000 | -0.00000 | 0.00000 | -0.24987 | 0.00000  |         |
| 2              | 2  | 0.00000   | -1.00000       | 0.00000 | 0.00000   | 1.00000 | 0.00000  | 0.00000 | -0.24987 | -0.06247 |         |
|                | 3  | 6.00000   |                |         |           | 1.00000 | 0.00000  | 0.00000 |          |          |         |
| 3              | 2  | 0.00000   | 0.00000        | 1.00000 | 0.00000   | 1.00000 | 0.00000  | 0.00000 | -0.00000 | -0.00000 |         |
|                | 5  | 0.00000   |                |         |           | 1.00000 | 0.00000  | 0.00000 |          |          |         |
| 4              | 4  | -6.00000  | -1.00000       | 0.00000 | 0.00000   | 1.00000 | -0.00000 | 0.00000 | -0.24987 | 0.00000  |         |
| 5              | 5  | 0.00000   | -1.00000       | 0.00000 | 0.00000   | 1.00000 | 0.00000  | 0.00000 | -0.24987 | -0.06247 |         |
|                | 6  | 6.00000   |                |         |           | 1.00000 | 0.00000  | 0.00000 |          |          |         |
| C <sub>m</sub> | =  | 230.40000 | C <sub>g</sub> | =       | 230.52134 | D       | =        | 0.00000 | B        | =        | 0.00000 |

Tabelle A.3: Querschnittswerte HE 120 A mit Wölb- und Plattenfreiheitsgraden – Teil 1

## A.1 Das Kipp-Problem am Beispiel eines HE 120 A

|                       |    |            |                  |            |          |          |          |          |          |          |
|-----------------------|----|------------|------------------|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Einheitszustand k = 4 |    |            |                  |            |          |          |          |          |          |          |
| Is                    | Ik | u/V'       | f-s/V            | f-q/V      | f-t/V    | v/V      | w/V      | phi/V    | Sk/W'    | Sf/W'    |
| 1                     | 1  | -31.80000  | -5.30000         | 3.00000    | 1.00000  | 5.30000  | 6.00000  | 1.00000  | -0.04706 | 0.00000  |
| 2                     | 2  | -0.00000   | -5.30000         | -3.00000   | 1.00000  | 5.30000  | -0.00000 | 1.00000  | -0.04706 | -0.01177 |
|                       | 3  | 31.80000   |                  |            |          | 5.30000  | -6.00000 | 1.00000  |          |          |
| 3                     | 2  | -0.00000   | -0.00000         | 0.00000    | 1.00000  | 5.30000  | -0.00000 | 1.00000  | -0.00000 | -0.00000 |
|                       | 5  | 0.00000    |                  |            |          | -5.30000 | -0.00000 | 1.00000  |          |          |
| 4                     | 4  | 31.80000   | 5.30000          | 3.00000    | 1.00000  | -5.30000 | 6.00000  | 1.00000  | 0.04706  | 0.00000  |
| 5                     | 5  | 0.00000    | 5.30000          | -3.00000   | 1.00000  | -5.30000 | -0.00000 | 1.00000  | 0.04706  | 0.01177  |
|                       | 6  | -31.80000  |                  |            |          | -5.30000 | -6.00000 | 1.00000  |          |          |
| C <sub>m</sub> =      |    | 6471.93660 | C <sub>g</sub> = | 6486.57600 | D =      | 4.53767  | B =      | 0.00000  |          |          |
| Einheitszustand k = 5 |    |            |                  |            |          |          |          |          |          |          |
| Is                    | Ik | u/V'       | f-s/V            | f-q/V      | f-t/V    | v/V      | w/V      | phi/V    | Sk/W'    | Sf/W'    |
| 1                     | 1  | 0.00089    | 0.00015          | -0.50000   | -0.16667 | -0.00015 | -1.00000 | -0.17034 | 0.02241  | 0.00000  |
| 2                     | 2  | 0.00000    | 0.00015          | 0.50000    | -0.16667 | -0.00015 | 0.00000  | -0.15933 | 0.02241  | 0.00560  |
|                       | 3  | -0.00089   |                  |            |          | -0.00015 | 1.00000  | -0.17034 |          |          |
| 3                     | 2  | 0.00000    | 0.00000          | -0.00015   | 0.00000  | -0.00015 | 0.00000  | -0.15933 | 0.00000  | 0.00000  |
|                       | 5  | 0.00000    |                  |            |          | -0.00015 | 0.00000  | 0.15933  |          |          |
| 4                     | 4  | 0.00089    | 0.00015          | 0.50000    | 0.16667  | -0.00015 | 1.00000  | 0.17034  | 0.02241  | 0.00000  |
| 5                     | 5  | 0.00000    | 0.00015          | -0.50000   | 0.16667  | -0.00015 | 0.00000  | 0.15933  | 0.02241  | 0.00560  |
|                       | 6  | -0.00089   |                  |            |          | -0.00015 | -1.00000 | 0.17034  |          |          |
| C <sub>m</sub> =      |    | 0.00001    | C <sub>g</sub> = | 0.38088    | D =      | 0.11811  | B =      | 2.40880  |          |          |
| Einheitszustand k = 6 |    |            |                  |            |          |          |          |          |          |          |
| Is                    | Ik | u/V'       | f-s/V            | f-q/V      | f-t/V    | v/V      | w/V      | phi/V    | Sk/W'    | Sf/W'    |
| 1                     | 1  | -0.01066   | -0.00178         | -0.50000   | -0.16667 | 0.00178  | -1.00000 | -0.17680 | -0.28294 | 0.00000  |
| 2                     | 2  | 0.00000    | -0.00178         | 0.50000    | -0.16667 | 0.00178  | 0.00000  | -0.14639 | -0.28294 | -0.07074 |
|                       | 3  | 0.01066    |                  |            |          | 0.00178  | 1.00000  | -0.17680 |          |          |
| 3                     | 2  | 0.00000    | 0.00000          | 0.00000    | 0.00034  | 0.00178  | 0.00000  | -0.14639 | -0.00000 | -0.00000 |
|                       | 5  | 0.00000    |                  |            |          | -0.00178 | 0.00000  | -0.14639 |          |          |
| 4                     | 4  | 0.01066    | 0.00178          | -0.50000   | -0.16667 | -0.00178 | -1.00000 | -0.17680 | 0.28294  | 0.00000  |
| 5                     | 5  | 0.00000    | 0.00178          | 0.50000    | -0.16667 | -0.00178 | 0.00000  | -0.14639 | 0.28294  | 0.07074  |
|                       | 6  | -0.01066   |                  |            |          | -0.00178 | 1.00000  | -0.17680 |          |          |
| C <sub>m</sub> =      |    | 0.00073    | C <sub>g</sub> = | 0.36158    | D =      | 0.11402  | B =      | 6.66820  |          |          |
| Einheitszustand k = 7 |    |            |                  |            |          |          |          |          |          |          |
| Is                    | Ik | u/V'       | f-s/V            | f-q/V      | f-t/V    | v/V      | w/V      | phi/V    | Sk/W'    | Sf/W'    |
| 1                     | 1  | 0.00000    | 0.00000          | 0.50000    | 0.16667  | 0.00000  | 1.00000  | 0.25000  | 0.00000  | 0.00000  |
| 2                     | 2  | 0.00000    | 0.00000          | 0.50000    | -0.16667 | 0.00000  | 0.00000  | 0.00000  | -0.00000 | -0.00000 |
|                       | 3  | 0.00000    |                  |            |          | 0.00000  | 1.00000  | -0.25000 |          |          |
| 3                     | 2  | 0.00000    | 0.00000          | 0.00000    | 0.00000  | 0.00000  | 0.00000  | 0.00000  | 0.00000  | 0.00000  |
|                       | 5  | -0.00000   |                  |            |          | 0.00000  | 0.00000  | 0.00000  |          |          |
| 4                     | 4  | -0.00000   | 0.00000          | -0.50000   | -0.16667 | 0.00000  | -1.00000 | -0.25000 | -0.00000 | 0.00000  |
| 5                     | 5  | -0.00000   | 0.00000          | -0.50000   | 0.16667  | 0.00000  | 0.00000  | 0.00000  | 0.00000  | 0.00000  |
|                       | 6  | -0.00000   |                  |            |          | 0.00000  | -1.00000 | 0.25000  |          |          |
| C <sub>m</sub> =      |    | 0.00000    | C <sub>g</sub> = | 0.26524    | D =      | 0.12190  | B =      | 54.70086 |          |          |
| Einheitszustand k = 8 |    |            |                  |            |          |          |          |          |          |          |
| Is                    | Ik | u/V'       | f-s/V            | f-q/V      | f-t/V    | v/V      | w/V      | phi/V    | Sk/W'    | Sf/W'    |
| 1                     | 1  | -0.00379   | 0.00000          | 0.49964    | 0.16679  | 0.00000  | 1.00000  | 0.25018  | -0.20585 | 0.00000  |
| 2                     | 2  | -0.00379   | 0.00000          | 0.49964    | -0.16679 | 0.00000  | -0.00072 | 0.00000  | 0.20585  | 0.06862  |
|                       | 3  | -0.00379   |                  |            |          | 0.00000  | 1.00000  | -0.25018 |          |          |
| 3                     | 2  | -0.00379   | -0.00072         | 0.00000    | 0.00000  | 0.00000  | -0.00072 | 0.00000  | -1.58855 | -0.13724 |
|                       | 5  | 0.00379    |                  |            |          | 0.00000  | -0.00072 | 0.00000  |          |          |
| 4                     | 4  | 0.00379    | 0.00000          | 0.49964    | 0.16679  | 0.00000  | 1.00000  | 0.25018  | 0.20585  | 0.00000  |
| 5                     | 5  | 0.00379    | 0.00000          | 0.49964    | -0.16679 | 0.00000  | -0.00072 | 0.00000  | -0.20585 | -0.06862 |
|                       | 6  | 0.00379    |                  |            |          | 0.00000  | 1.00000  | -0.25018 |          |          |
| C <sub>m</sub> =      |    | 0.00030    | C <sub>g</sub> = | 0.26532    | D =      | 0.12213  | B =      | 54.77918 |          |          |

Tabelle A.4: Querschnittswerte HE 120 A mit Wölb- und Plattenfreiheitsgraden – Teil 2

# A Beispiele

Java2 Vtb.Qep Version 3.00 (c) 1987-2002 by \_ah 21.06.2004 Nr.4855

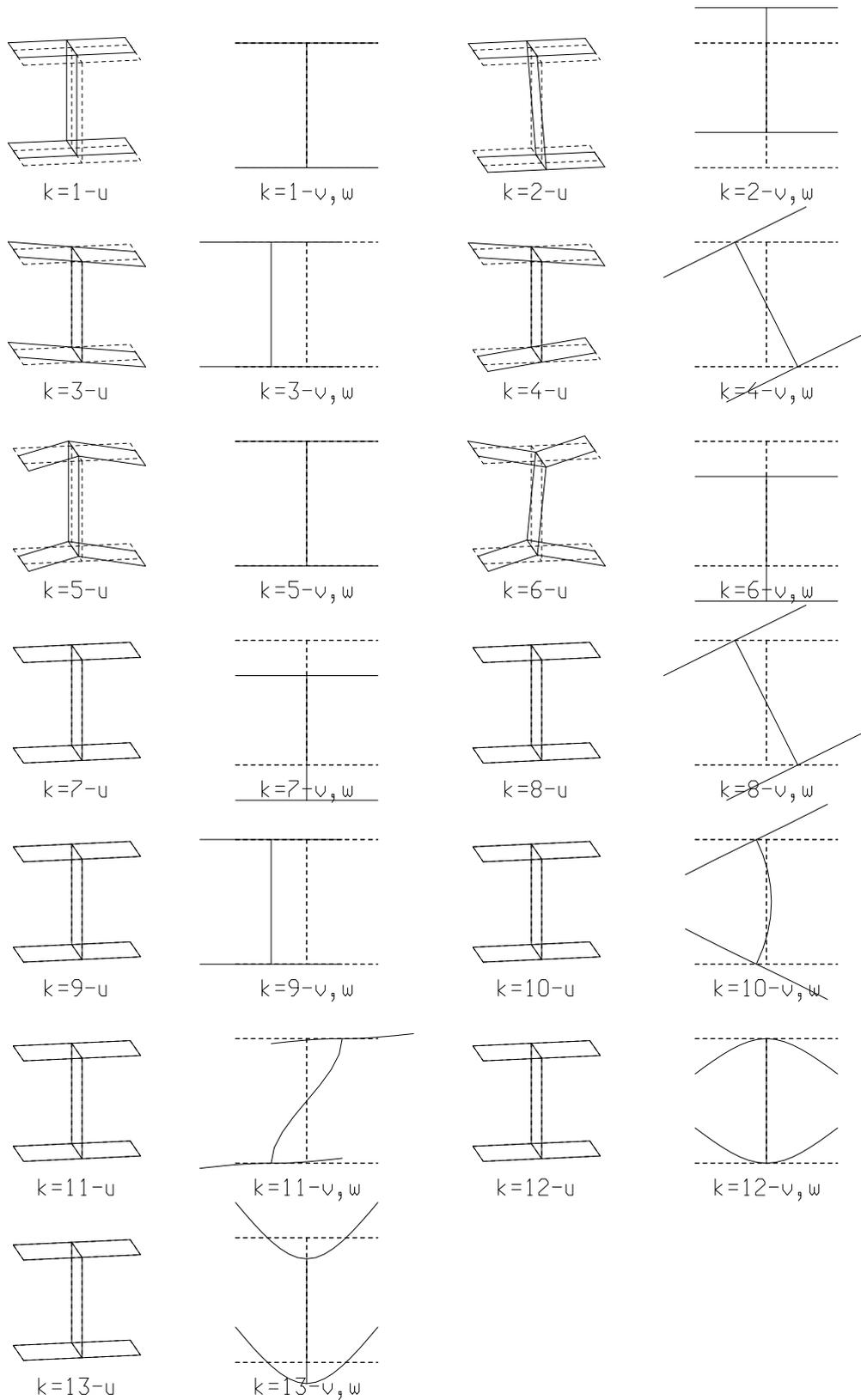


Abbildung A.4: Einheitszustände HE 120 A mit Wölb-, Platten- und Schubfreiheitsgraden.

## A.2 Das Schubbeulen am wölbfreien Kastenprofil

In diesem Beispiel wird das Tragverhalten eines wölbfreien Kastenprofils betrachtet. Der hierfür ausgesuchte Querschnitt ist quadratisch mit einer Kantenlänge von 30.0 cm und einer Wanddicke von 0.20 cm. Er entspricht somit dem Sonderfall des „wölbfreien Querschnitts“. Jede Scheibe wird in drei Teilscheiben gleicher Breite unterteilt. Dies ist erforderlich um die erwartete Beulform aus dem Schubbeulen in guter Näherung darzustellen. Damit das Beispiel und seine Ergebnisse nicht nur zufällig sondern nachvollziehbar wird, muss für die Orthogonalisierung der Zustände, die bei zyklisch-symmetrischen Querschnitten indifferent ist, eine kleine Hilfestellung geleistet werden. Dies geschieht indem in den vertikalen Hauptscheiben die Dicken der mittleren Scheiben um 0.5% auf 0.201 cm vergrößert werden. Dies hat auf die Berechnung praktisch keinen Einfluss, die Lösungen werden jedoch eindeutig. Von den möglichen Freiheitsgraden werden lediglich die Wölb- und Plattenfreiheitsgrade ausgewählt. Sie sind für die Berechnung vollkommen ausreichend, da der elastische Kreisschubfluss bei dieser Kombination der Freiheitsgrade für jede geschlossene Zelle hinzugefügt wird. Die so entstandenen Querschnittswerte sind in Abbildung A.6 dargestellt.

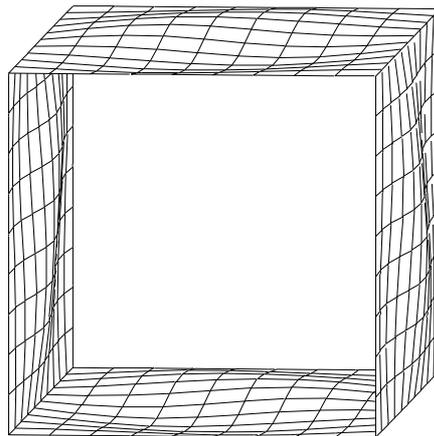


Abbildung A.5: Beulfigur des Kastenprofils.

Mit diesem Querschnitt, bei dem nur die maßgebenden Zustände 4–8, 10 und 11 zu berücksichtigen sind, wird ein Stab der Länge  $\ell = 60$  cm erzeugt. Als Lagerungsbedingungen werden Zustandslager verwendet. Es gilt:  ${}^kV_b = 0 \quad \forall k \geq 4$  am Stabanfang und  ${}^kV_e = 0 \quad \forall k \geq 5$  am Stabende. Unter einer Torsionsbelastung von 0.60 kNm am Stabende erfährt der Stab, wegen seiner großen Torsionssteifigkeit, lediglich eine geringe Verdrehung von  $8.254 \cdot 10^{-5}$ . Aus dieser äußeren Beanspruchung ergibt sich eine über die Scheiben konstant verlaufende Schubspannung von  $\frac{1}{6}$  kN/cm<sup>2</sup>. Wird die Belastung nun gesteigert so erreicht man bei einem Laststeigerungsfaktor von  $\gamma_{ki} = 36.300$  den Belastungspunkt, an dem das Profil auf Schubbeulen versagt. Die dazu gehörende Beulfigur ist in Abbildung A.5 dargestellt; dabei ist die Verformung der oberen und unteren Scheibe zu be-

## A Beispiele

trachten. Wegen der steiferen mittleren Zwischenscheibe erhalten die vertikalen Scheiben eine höhere Verzweigungslast als die horizontalen. Die ideale Beulspannung beträgt somit  $\tau_{ki} = \frac{1}{6}\gamma_{ki} = 6.033 \text{ kN/cm}^2$ .

Um die Qualität dieser idealen Beulspannung zu bestimmen, wird auf bekannte Näherungslösungen und eine Speziallösung nach der VTB zurückgegriffen.

Für den Fall des reinen Schubbeulens einer allseitig gelenkig oder eingespannt gelagerten Scheibe finden sich in der Literatur Näherungslösungen, die mit Hilfe des Energieverfahrens durch einen Ritz-Ansatz ermittelt wurden. Siehe z. B. DIN 4114 [5] oder Klöppel und Scheer [20]. Danach liegen die Beulwerte der beiden genannten Randlagerungsfälle, die hier als Grenzwerte für das Kastenprofil dienen, für ein Beulfeld mit  $\alpha = 2$  bei  $6.34 \leq k \leq 10.38$ . Die Eulerspannung beträgt bei den gegebenen Abmessungen  $\sigma_e = 0.8436 \text{ kN/cm}^2$  sodass sich die zugehörigen ideellen Verzweigungsspannungen im Bereich  $5.348 \leq \tau_{ki} \leq 8.756$  bewegen.

Die zuvor für den Kasten berechnete Spannung liegt etwas über dem unteren Grenzwert, was auf zwei Ursachen zurückgeführt werden kann:

- Durch die Abbildung des Kastens mit nur zwei Zwischenknotenlinien kann die exakte Beulfigur nur angenähert werden.
- Beim Kastenprofil entstehen an den Ecken Einspannwirkungen, die eine Erhöhung der Verzweigungslast nach sich ziehen.

Zuletzt soll dieses Ergebnis mit einem speziellen Berechnungsverfahren verglichen werden. Es wurde von Hanf [13] speziell für den Nachweis ausgesteifter Stegbleche, basierend auf der VTB, programmiert. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind im Ergebnisausdruck Abbildung A.7 zu sehen. Zunächst enthält er die Abmessungen des Beulfeldes, das auch Steifen enthalten kann, danach die Randspannungen und Werkstoffkenngrößen. Dem schließt sich als Berechnungsergebnis die vorhandene Beulsicherheit und die Beulform an. An der Verschiebung der Knotenlinien ist deutlich die Übereinstimmung mit der Beulfigur in Abbildung A.5 zu erkennen. Der eingeprägte Randspannungszustand von  $\tau = \frac{1}{6}$  führt zu einer ideellen Beulspannung die bei  $\tau_{ki} = 5.57$  liegt. Das Ergebnis liegt näher bei dem am Kasten ermittelten Wert, wenn die Teilung auf zwei Zwischenknotenlinien reduziert wird; ein Umstand, der die erste der oben geäußerten Erklärungen unterstützt.

## A.2 Das Schubbeulen am wölbfreien Kastenprofil

MS/DOS VTB\_QEP Version 2.00 (c) 1987-1990 by \_ah 15.08.91 Nr.4072

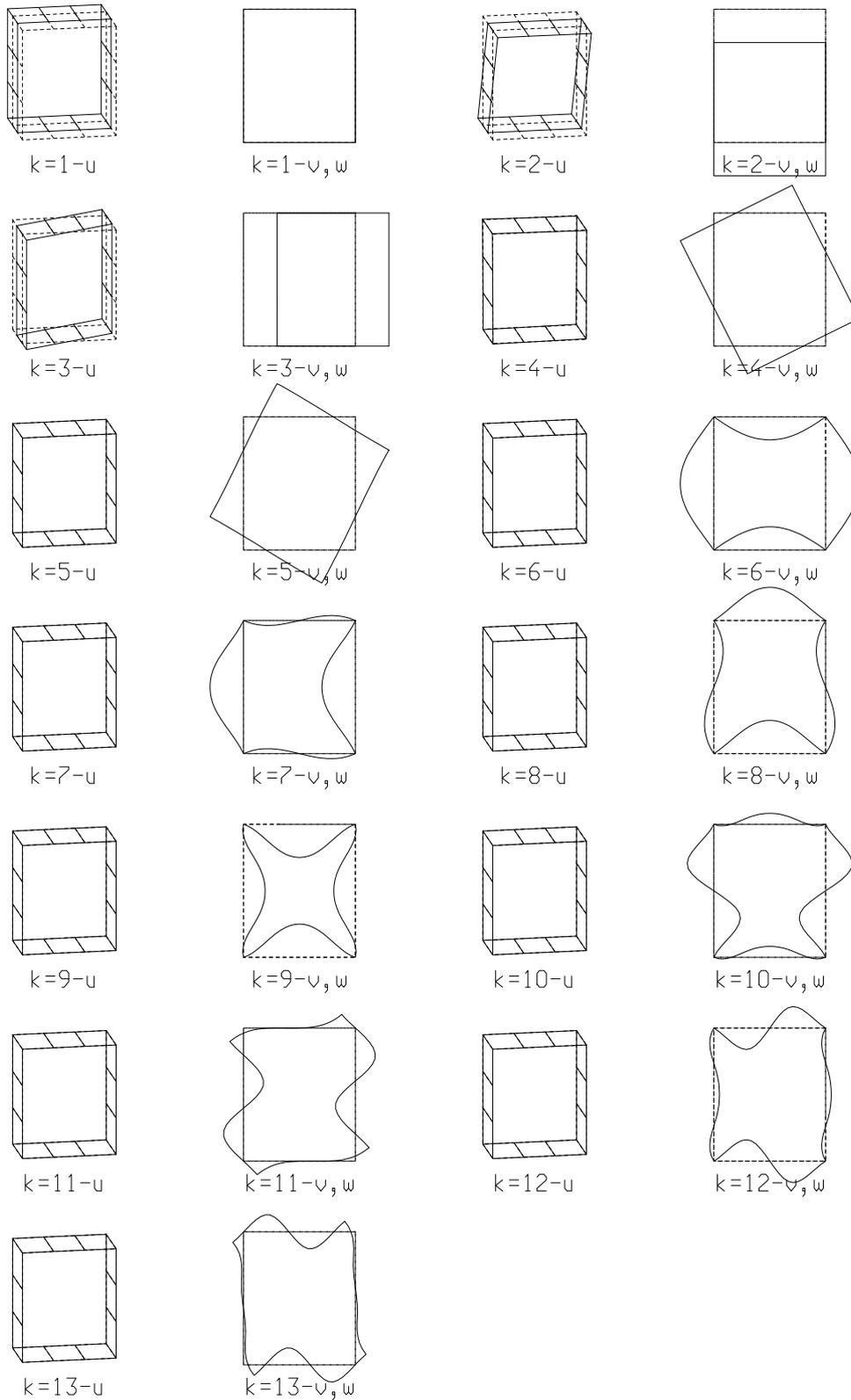


Abbildung A.6: Einheitszustände Kastenprofil mit Wölb- und Plattenfreiheitsgraden.

A Beispiele

B E U L N A C H W E I S nach VTB Version 2.00 [ kN & cm ]  
===== (c) 1990,1991 by M. Hanf & A. Haakh

Systembeschreibung: a \* b = 60.0 \* 30.0

| i | Scheiben |       | Steifen |    |    |
|---|----------|-------|---------|----|----|
|   | b        | t     | is      | bs | ts |
| 1 | 6.000    | 0.200 |         |    |    |
| 2 | 6.000    | 0.200 |         |    |    |
| 3 | 6.000    | 0.200 |         |    |    |
| 4 | 6.000    | 0.200 |         |    |    |
| 5 | 6.000    | 0.200 |         |    |    |

Belastung:

Werkstoffkenngrößen:

Sigma\_oben : 0.0000  
Sigma\_unten: 0.0000  
Tau\_mittel : 0.1667

Emodul : 21000.00  
mue : 0.30

Ideelle Beulsicherheit: Gamma\_ki = 33.39

B E U L F O R M  
=====

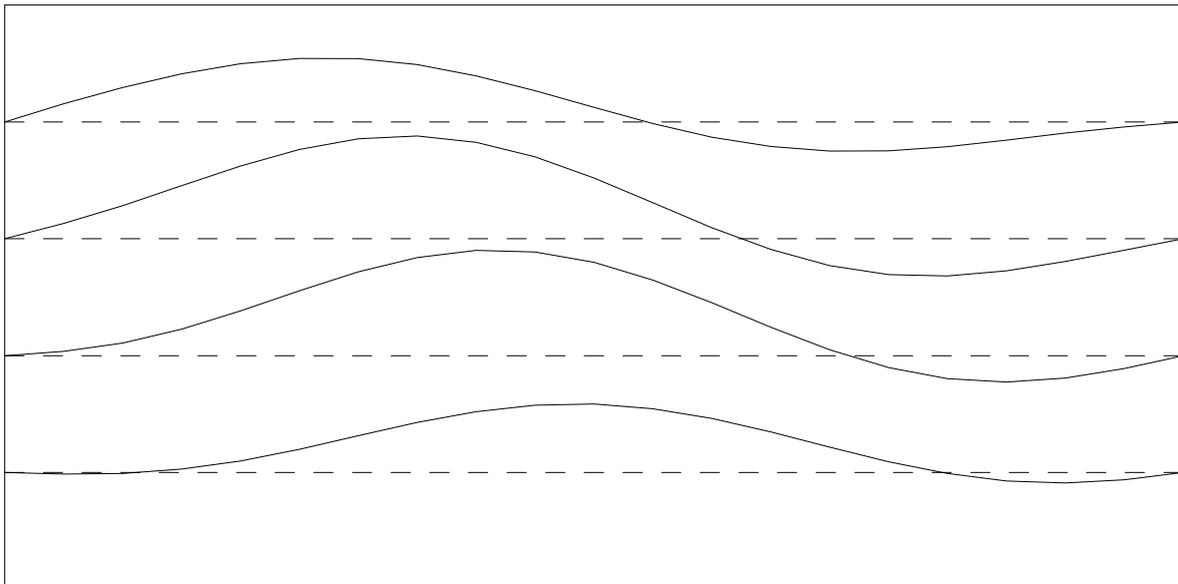


Abbildung A.7: Berechnungsergebnisse aus Beulprogramm.

## A.3 Die Platte mit Einzelstütze

Anhand dieses Beispiels soll die Wirkung der diskreten Lager aufgezeigt werden. Hierzu wurde eine dreiseitig gelagerte Stahlbetondeckenplatte ( $E = 30000 \text{ MN/m}^2$  und  $\mu = 0.2$ ) mit den Abmessungen  $d = 15 \text{ cm}$ ,  $b = 2.50 \text{ m}$  und  $l = 6.00 \text{ m}$  gewählt, die an einen langen Rand eingespannt, an den kurzen Rändern gelenkig gelagert und an dem freien Rand in der Mitte durch eine Stütze vertikal gelagert ist. Der untersuchte Lastfall stammt aus einer Stützenlast in Höhe von  $Q = 100 \text{ kN}$ , die bei  $x_Q = 4.20 \text{ m}$  und  $y_Q = 1.50 \text{ m}$  steht. Die Platte wurde in fünf Teilscheiben unterteilt und am rechten Rand unverschieblich und eingespannt gelagert. Die Teilung wurde so gewählt, dass unter der Einzellast eine Knotenlinie liegt. Die Einheitszustände des Querschnitts sind in Abbildung A.8 dargestellt. Wie der Darstellung zu entnehmen ist, tragen, sieht man von der Normalkraftverformung – dem Einheitszustand 1 – ab, alle übrigen Zustände zur Vertikalverschiebung des freien Randes bei. Dies gilt auch für die belastete Knotenlinie 4, sodass sie alle (außer Zustand 1) bei der Berechnung zu berücksichtigen sind.

MS/DOS VTB\_QEP Version 2.01 (c) 1987-1991 by \_ah 22.03.1992 Nr. 4038

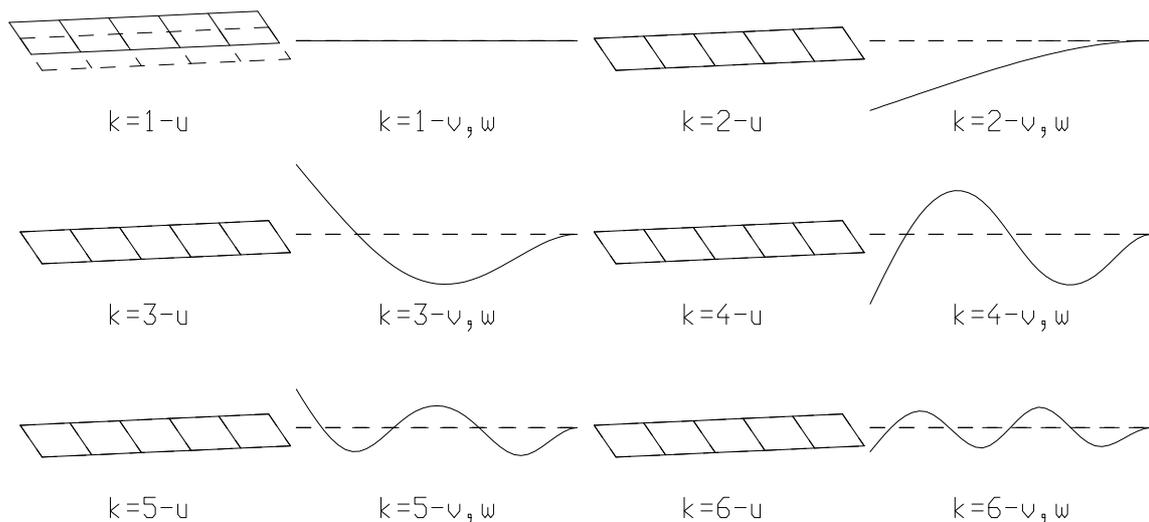


Abbildung A.8: Einheitszustände der gelagerten Platte.

In Längsrichtung wurde das System in 3 Stäbe mit den Teillängen von 3.00 m, 1.20 m und 1.80 m unterteilt. Am Anfang und Ende des Gesamtstabes wurden Zustandslager mit der Bedingung  ${}^kV = 0$  und  ${}^kW = 0$  eingeführt; an der Abschnittsgrenze zwischen 1. und 2. Stab wurde ein vertikaler Pendelstab am freien Ende der Querschnitts-scheibe angebracht. Die Verformungsfigur, die aus dieser Belastung resultiert, ist in Abbildung A.9 zu sehen. Die Bedingung  $w = 0$  an der Unterstützung ist eingehalten. Die für die Bemessung der Platte maßgebenden Schnittgrößen sind die Momente an der Stützstelle und unter der Einzellast. Sie ergaben sich zu  $m_{xx,St} = 24.84 \text{ kNm/m}$ ,  $m_{xx,Q} = 32.63 \text{ kNm/m}$  und  $m_{ss,Q} = 26.75 \text{ kNm/m}$ . Hierbei handelt es sich um Singularitäten, die sich in Abhängigkeit von der Querschnittseinteilung noch verändern können. Betrachtet man die Schnittgrößen 20.0 cm vor bzw. nach den untersuchten Stellen, so

## A Beispiele

liegen sie dort bereits nur noch bei ca. 50 % der angegebenen Werte. Die maximale Randspannung beträgt  $m_{ss,R} = -23.11 \text{ kNm/m}$  auf der Höhe der Einzellast (bei  $x = 4.20 \text{ m}$ ). Die Vertikalverschiebung unter der Einzellast beträgt  $w_Q = 0.191 \text{ cm}$  und der Pendelstab erhält eine Belastung von  $N_P = 30.50 \text{ kN}$ . Die größte Vertikalverschiebung tritt am freien Rand in Höhe der Einzellast auf und beträgt  $w_{max} = 0.205 \text{ cm}$ , Die größte negative Verschiebung erfährt die Platte am freien Rand bei  $x = 2.00 \text{ m}$ ; sie beträgt  $w_{min} = -0.055 \text{ cm}$ .

Es zeigt sich, dass die Verallgemeinerte Technische Biegetheorie auch für gängige Probleme des Hochbaus ein geeignetes Hilfsmittel ist, mit geringem Aufwand Systeme zu berechnen, die ansonsten einer Berechnung mit finiten Elementen bedürften.

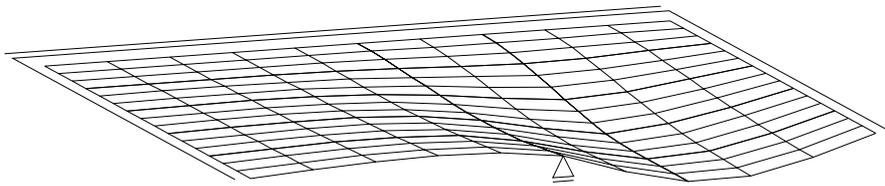


Abbildung A.9: Verformungsfigur der Platte.

## A.4 Parameterstudie an einem Kastenprofil mit abgeschrägten Ecken

Im folgenden Beispiel wird dargelegt, wie sich der Einfluss der Schubnachgiebigkeit auf das Beulverhalten eines quadratischen Kastenprofils mit abgeschrägten Ecken unter Normkraftbelastung auswirkt. Die in Abbildung A.13 dargestellten Kurven sind auf die ideelle Beullast einer quadratischen Platte bezogen. Diese beträgt mit einem Beulwert von  $k_\sigma = 4$ :

$$N_{ki,0} = A \cdot k_\sigma \frac{E\pi^2}{12(1-\mu^2)} \frac{t^2}{b^2}. \quad (\text{A.1})$$

Untersucht man diesen Querschnitt auf sein Beulverhalten, so zeigen sich zwei charakteristische Versagensformen: das symmetrische und das antimetrische Beulen. Diese beiden Fälle, deren Formen in Abbildung A.10 dargestellt sind, wurden getrennt jeweils mit und ohne Berücksichtigung der Schubelastizität berechnet und aufgetragen. Die Einheitszustände der Querschnittswerte, ohne und mit Schubfreiheitsgrad, sind in den Abbildungen A.11 und A.12 für einen Querschnitt exemplarisch dargestellt. Der Querschnitt, der

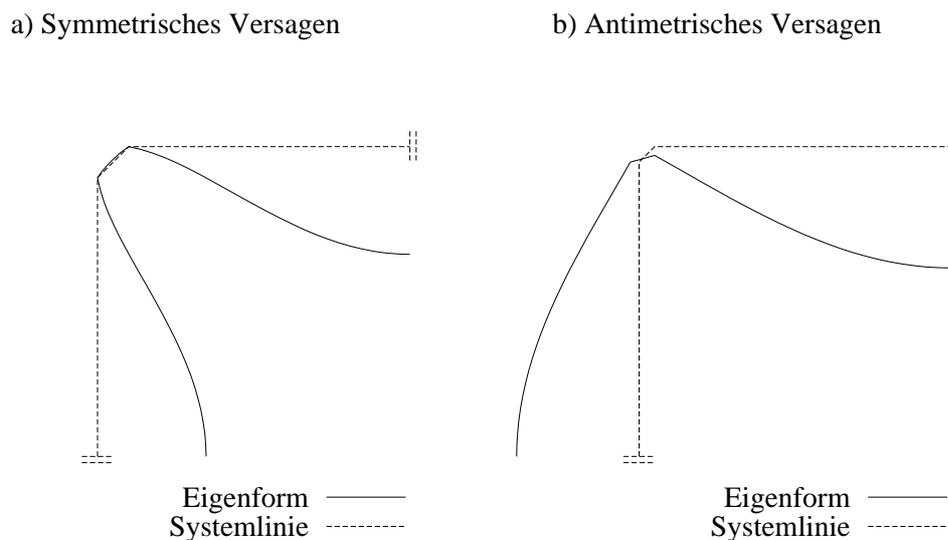


Abbildung A.10: Die Beulformen eines quadratischen Kastenprofils unter Längskraftbelastung. a)  $b^*/b = 0.10$  b)  $b^*/b = 0.05$

zuvor schon von Möller [23] untersucht wurde, hat die Hauptabmessung  $2 \cdot b = 200$  mm und wurde mit einer Blechdicke von  $t = 1.0$  mm ( $b_{ges}/t = 200$ ) berechnet. Daraus erhält man  $N_{ki,0} = 3.796$  kN. Für die Berechnung mit der Verallgemeinerte Technische Biegetheorie wurde 1/4 des Kastenquerschnitts abgebildet und an den Scheibenmitten wurden Querkraftmechanismen zur Berücksichtigung der Symmetriebedingung eingeführt. Die unter  $45^\circ$  geneigte, abgeschrägte Ecke wurde mit zwei Scheiben, die halbe Seitenbreite mit drei Teilscheiben abgebildet.  $b^*$  bezeichnet die Projektionslänge der abgeschrägten Ecke auf Außenflächen des Querschnitts. Die in Abbildung A.13 dargestellten Kurven gelten nur

## A Beispiele

für das spezielle Verhältnis  $t/b = 200$ . Andere Dickenverhältnisse führen zu abweichenden Kurvenverläufen.

Da die Menge der zu untersuchenden Querschnitte noch überschaubar war, wurden sie von Hand eingegeben und berechnet. Für die Lösung der Differentialgleichung wurde ein spezielles Programm DPS geschrieben, das auf dem Sinusansatz (siehe Anhang B.1.3) basiert und keine interaktive Eingabe erfordert, d.h. alle erforderlichen Eingaben werden mit dem Programmaufruf übergeben. Dieses Programm, das auch eine Zustandsauswahl zulässt, findet schnell und exakt den relativen, minimalen Beulwert (so vorhanden) infolge einer Normalkraftbelastung. Dieser wird in einem Bereich gesucht, der sich aus den charakteristischen Längen der gebetteten Zustände ergibt. Damit konnte die weitere Berechnung automatisiert in einem Shell-Script durchgeführt werden, das alle erforderlichen Programmaufrufe ausführt, die gewünschten Werte aus den Ergebnisdateien herausfiltert und für die weitere (graphische) Verarbeitung zusammenstellt.

Bei der Betrachtung der Kurvenverläufe in Abbildung A.13 fällt zunächst auf, dass beim antimetrischen Fall die Verzweigungslast erst einmal geringfügig abnimmt. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass mit Ausbildung der schrägen Ecke zunächst die Fläche des Querschnitts abnimmt, ohne dass der Beulwert nennenswert wächst. Erst bei  $b^*/b \approx 0.03$  überschreitet die Verzweigungslast wieder den Ausgangswert  $N_{ki,0}$ . Weiterhin zeigt der Graph, dass die Schubelastizität auf den symmetrischen Fall keinerlei Auswirkung hat – die beiden Kurven liegen übereinander. Beim antimetrischen Fall erhält die schräge Scheibe infolge der Schubverzerrungen eine Längsverschiebung die ein Abfallen der Verzweigungslast mit sich bringt. Diese wird bei  $b^*/b = 0.09$  mit 18.9% am größten.

Die günstigste Querschnittsausnutzung erhält man am Schnittpunkt der beiden Versagensformen, die bei Berücksichtigung der Schubverformbarkeit bei  $b^*/b \approx 0.128$  liegt. Dabei hat sich die Verzweigungslast, verglichen mit dem Querschnitt ohne abgeschrägte Ecken, um 91% erhöht!

## A.4 Parameterstudie an einem Kastenprofil mit abgeschrägten Ecken

UNIX VTB\_QEP Version 2.2.2 (c) 1987-1992 by \_ah 21.11.95 Nr.4031

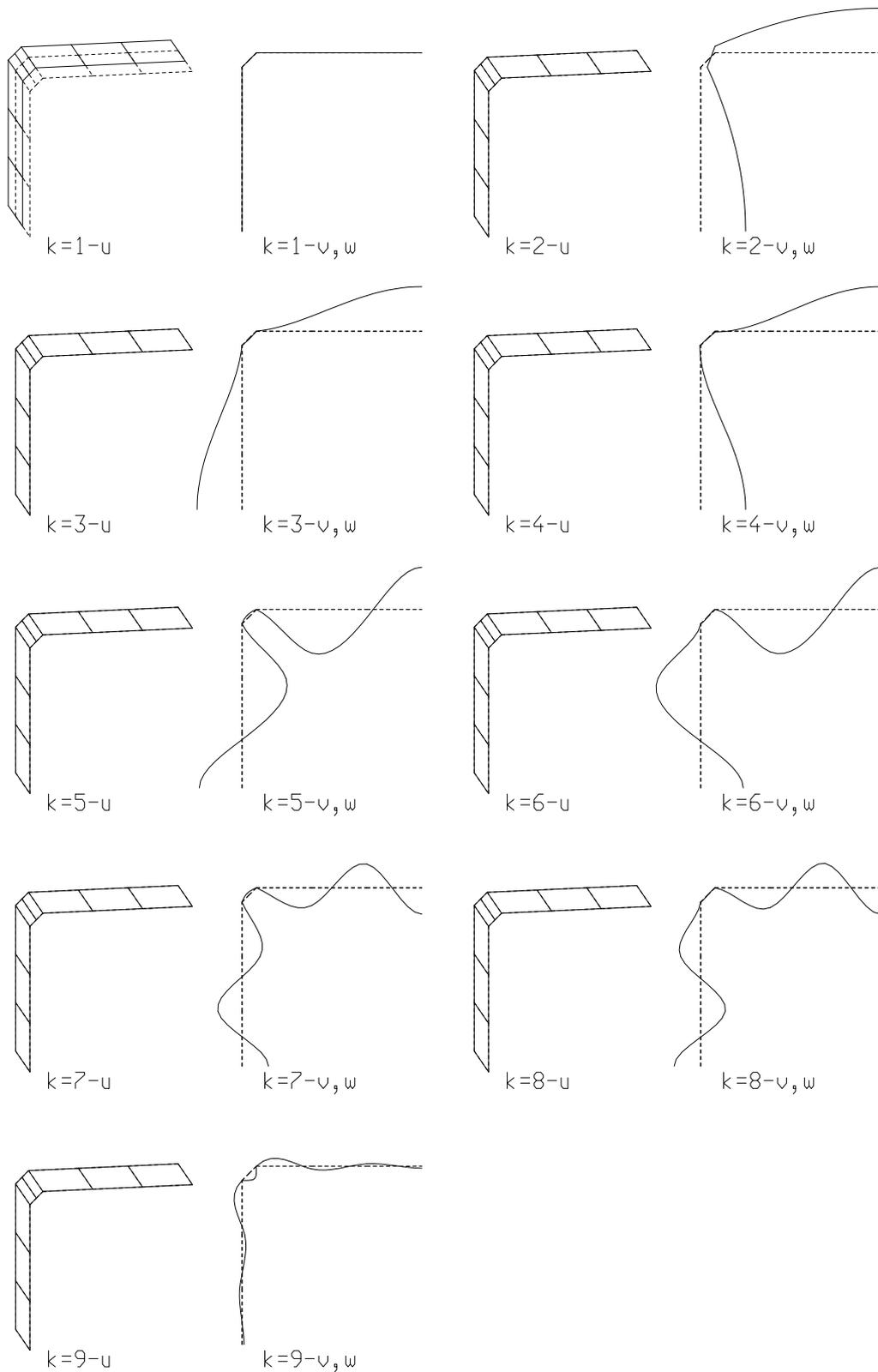


Abbildung A.11: Einheitszustände des Kastenprofils ohne Schubverformung.

# A Beispiele

UNIX VTB\_QEP Version 2.2.2 (c) 1987-1992 by \_ah 21.11.95 Nr.4044

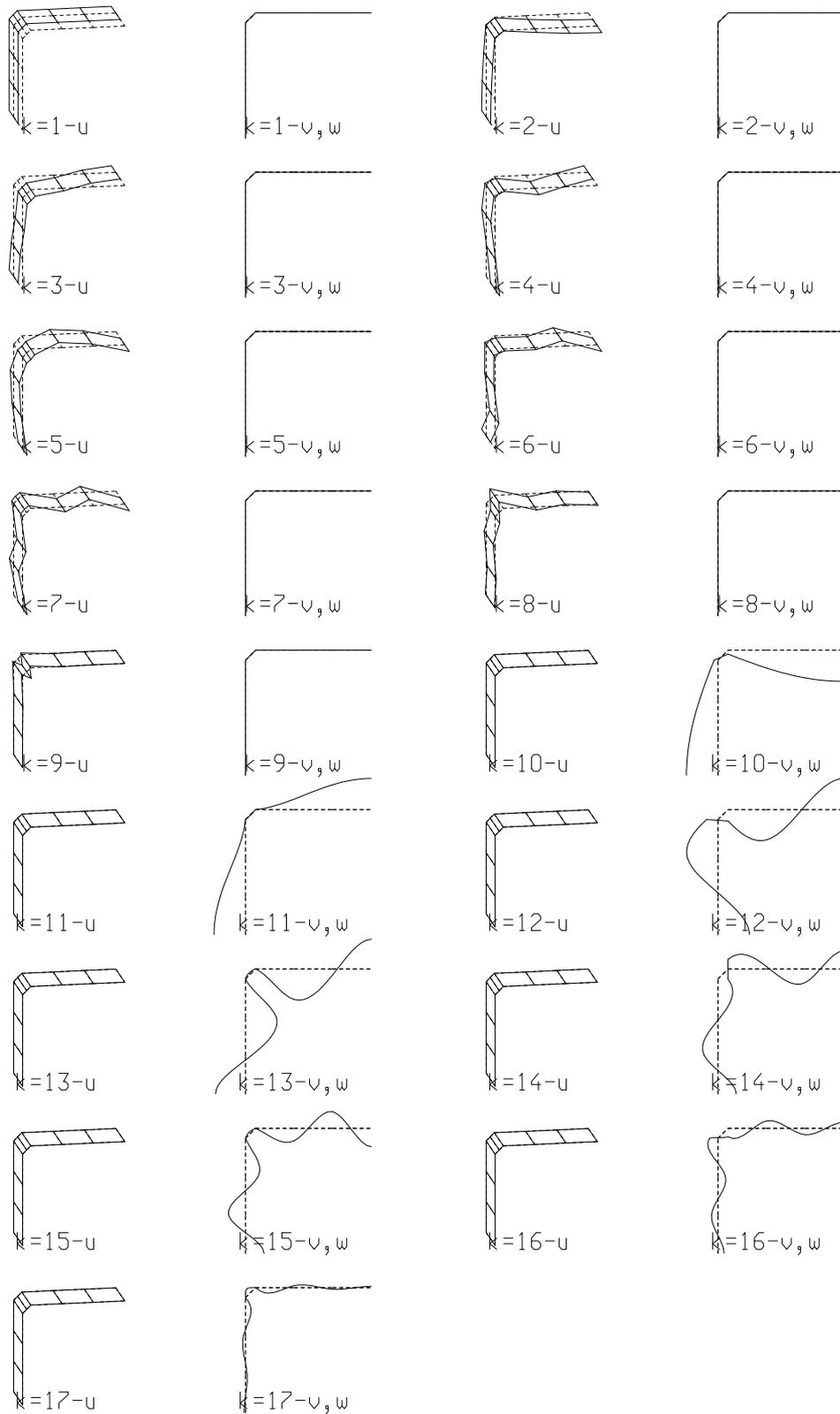


Abbildung A.12: Einheitszustände des Kastenprofils mit Schubverformung.

A.4 Parameterstudie an einem Kastenprofil mit abgeschrägten Ecken

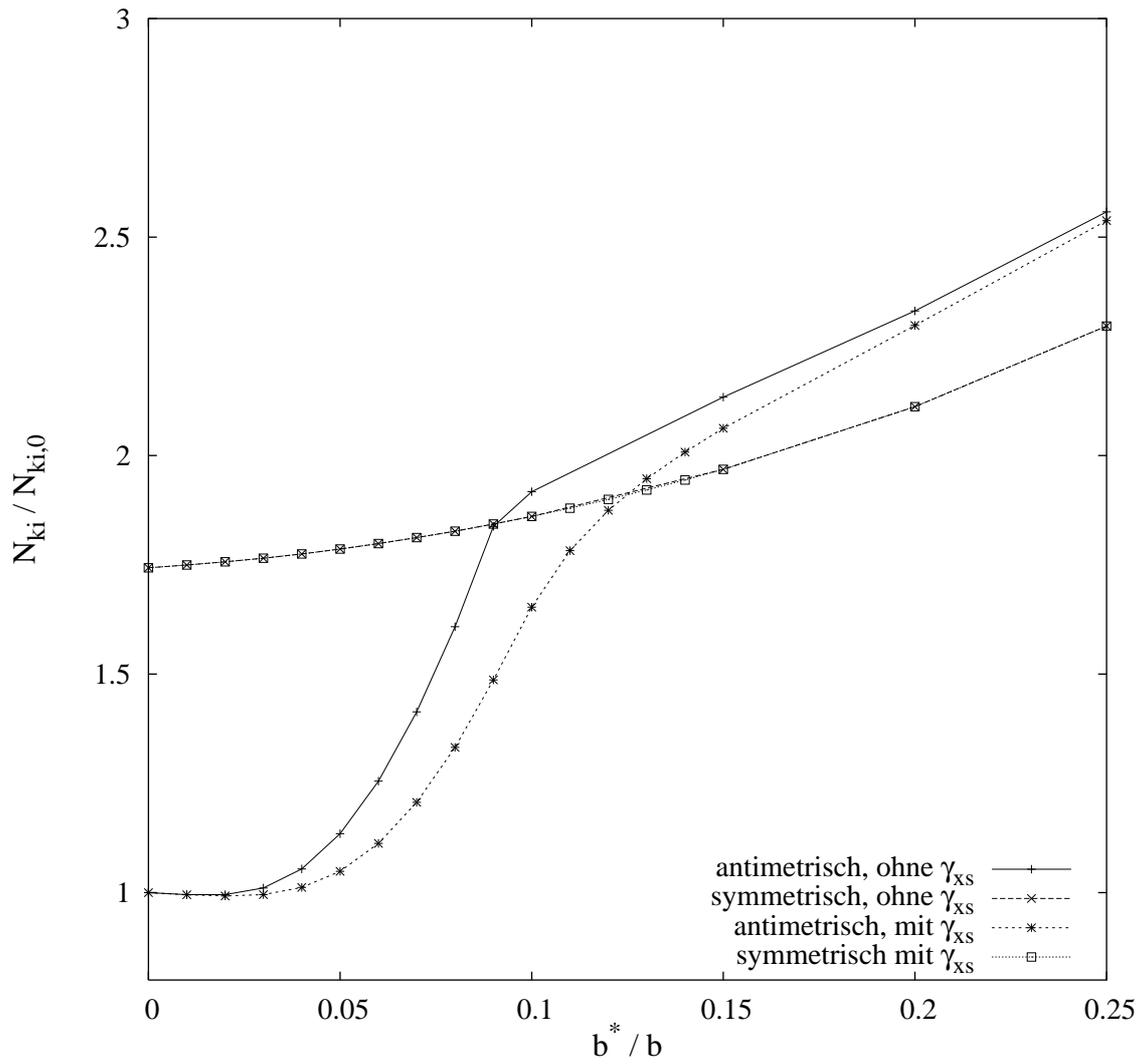


Abbildung A.13: Stabilitätsverhalten eines Stabes mit quadratischem Kastenquerschnitt und abgeschrägten Ecken.  $b_{ges}/t = 2b/t = 200$ .

## A.5 Der Einfluss der Schubverformung auf das Stabilitätsverhalten sickenversteifter Bleche

In diesem Beispiel wird untersucht, wie sich die Schubelastizität auf das Stabilitätsverhalten von sickenversteiften Blechen auswirkt. Die untersuchten Querschnitte haben allesamt eine Breite von  $b = 200$  mm, die Platten rechts und links der Sicke wurden bei der Berechnung in vier Scheiben gleicher Breite unterteilt; die V-Sicke besteht aus zwei, die Schrägsicke aus einer Scheibe. Beide sind unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale geneigt. Die Querschnitte sind an beiden Rändern horizontal verschieblich gelagert. Die Untersuchung wurde für den Parameter  $h/b$ , dem Verhältnis der Sickenhöhe zur Gesamtbreite der Platte durchgeführt. Die Höhe bezieht sich auf die Systemlinie. Das Dickenverhältnis  $b/t$  bezieht sich auf die Gesamtbreite des Querschnitts und wurde in den beiden untersuchten Fällen im Bereich von  $b/t = 400$  bis  $b/t = 100$  (bezogen auf die Teilfelder halbieren sich diese Werte) variiert. Die Bezugswerte  $N_{ki,0}$  stellen wie zuvor in Anhang A.4 die ideellen Verzweigungslasten der beidseitig gelenkig gelagerten Platte dar.

Da die Durchführung von Parameterstudien recht aufwendig ist, wurden für diese Untersuchung zwei spezielle Programme erstellt, die u.A. die Querschnittsabmessungen als Aufrufparameter erhalten, daraus die Eingabedatei für das Querschnittswerteprogramm erstellen und dieses dann aufrufen. So konnte mit einem Programmaufruf ein Satz Querschnittswerte ermittelt werden ohne jedes mal die interaktive Eingabe zu durchlaufen. Für die Verzweigungsberechnung wurde das bereits zuvor beschriebene Programm DPS verwendet. Mit Hilfe dieser Programme und einem Shell-Script, das die erforderlichen Programmaufrufe für Querschnittswerteberechnung und Lösung der Differentialgleichungen automatisiert durchführt und wiederum aus den Ergebnisdateien die gewünschten Daten herausfiltert und in spezielle Dateien wegspeichert, konnten die Berechnungen mit geringem Aufwand durchgeführt werden. Zur Kontrolle wurden Vergleichsrechnungen mit den Programmen GSL und DPL (siehe Anhang B.1.2) durchgeführt, die sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse zeigten.

### A.5.1 Beispiel V-Sicke

Wegen der vorhandenen Symmetrie wurden die aus der Querschnittswerteberechnung resultierenden symmetrischen und antisymmetrischen Anteile getrennt berechnet. Die beiden möglichen Beulformen sind in Abbildung A.14 dargestellt und in Abbildung A.15 sind die Ergebnisse dieser Untersuchung für die Dicken  $t = 0.5, 1.0$  und  $2.0$  mm aufgetragen. Wie man der Darstellung entnehmen kann, streben die Grenzwerte  $N_{ki}/N_{ki,0}$  für den symmetrischen Fall gegen 1 und für den antisymmetrischen Fall gegen 4, dem zweiwelligen Beulen. Der Einfluss der Schubelastizität ist dort am größten, wo er nicht maßgebend wird: dem antisymmetrischen Beulen oberhalb der aufsteigenden Kurve für das symmetrische Sickenknicken. Folgt man den maßgebenden Kurven der symmetrischen und der antisymmetrischen Beulform, so ist zu erkennen, dass der Einfluss der Gleitung vernachlässigbar klein ist. Wie weiterhin zu erkennen ist, wird für größere Blechdicken ausschließlich der symmetrische Fall maßgebend. Für dünnere Bleche lässt sich wiederum die günstigste Querschnittsausnutzung dort erreichen, wo das Sickenknicken durch das Plattenbeulen abgelöst wird.

A.5 Der Einfluss der Schubverformung auf das Stabilitätsverhalten sickenversteifter Bleche

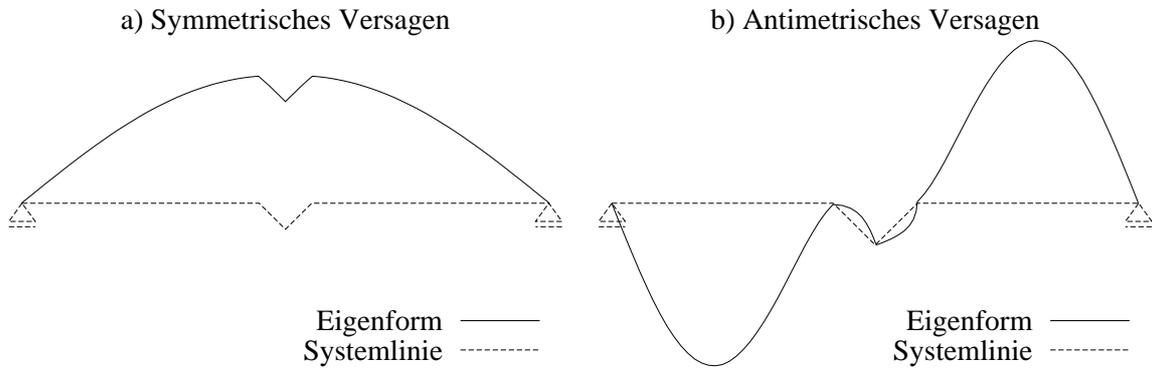


Abbildung A.14: Beulformen eines mit einer V-Sicke ausgesteiften Bleches.  $b/t = 100$ ,  
a)  $h/b = 0.05$ , b)  $h/b = 0.08$

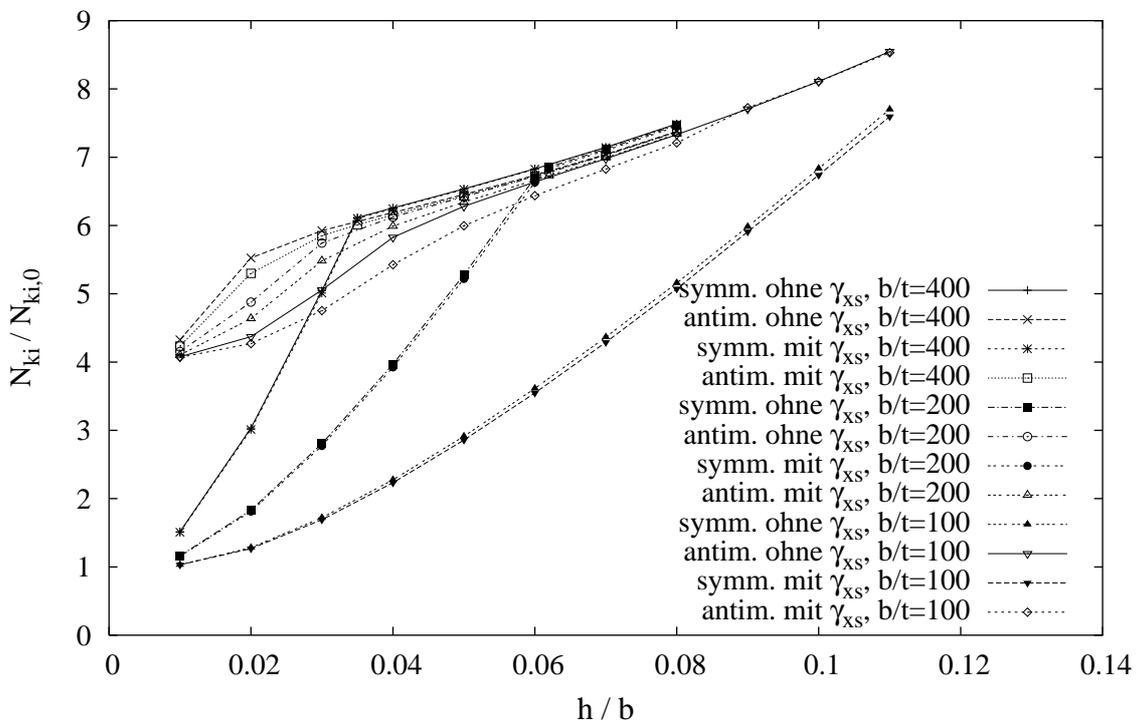


Abbildung A.15: Zum Stabilitätsverhalten eines mit V-Sicke ausgesteiften Bleches.

# A Beispiele

UNIX VTB\_QEP Version 2.3 (c) 1987-1995 by \_ah 18.12.95 Nr.4621

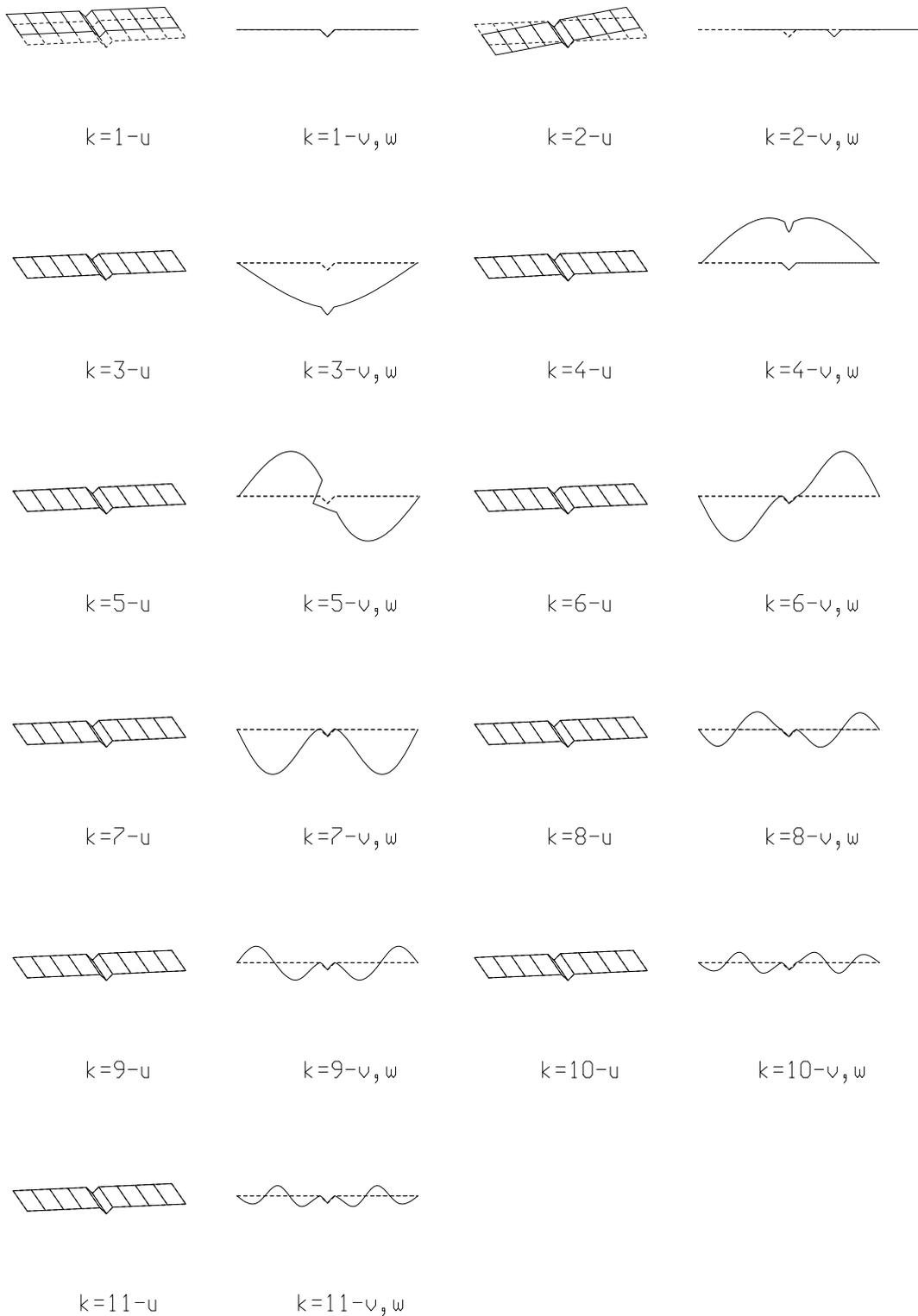


Abbildung A.16: Einheitszustände des Querschnitts mit V-Sicke ohne Schubverformung.

### A.5 Der Einfluss der Schubverformung auf das Stabilitätsverhalten sickenverteifter Bleche

UNIX VTB\_QEP Version 2.3 (c) 1987-1995 by \_ah 18.12.95 Nr.4622

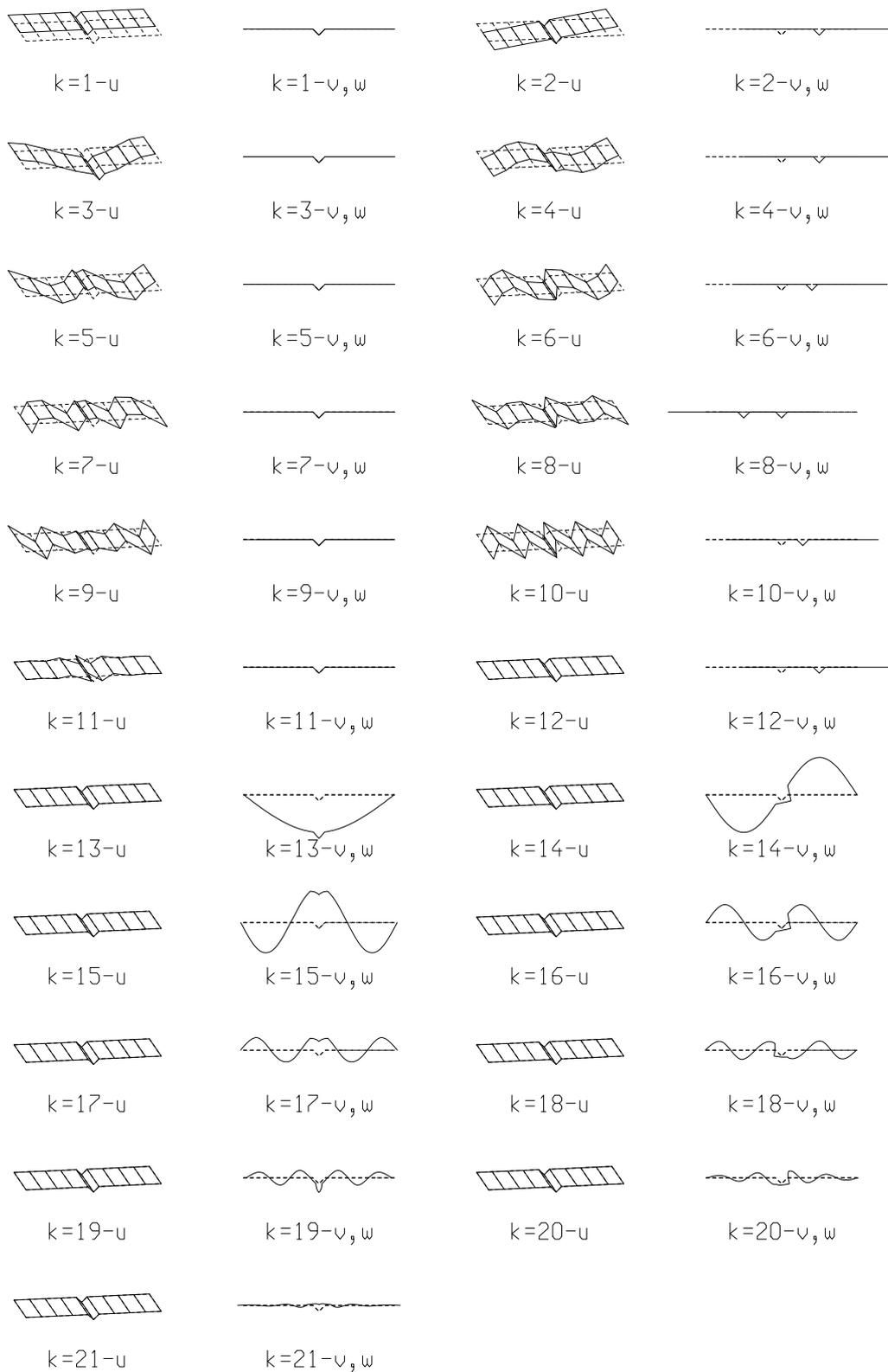


Abbildung A.17: Einheitszustände des Querschnitts mit V-Sicke mit Schubverformung.

## A.5.2 Beispiel Schräg-Sicke

Da das Blech mit Schrägsicke unsymmetrisch ist und von vorne herein nicht eindeutig zu erkennen ist, welche Charakteristiken die Versagensformen aufweisen, wurde in diesem Fall mit allen aus der Querschnittswerteermittlung stammenden Zuständen gerechnet. Es zeigt sich, dass die punktsymmetrischen Zustände keine Komponente zu den Eigenformen liefern. Dies kann man an den beiden auftretenden Fällen: dem Sickenknicken und dem Teilfeldbeulen (siehe Abbildung A.18) erkennen.

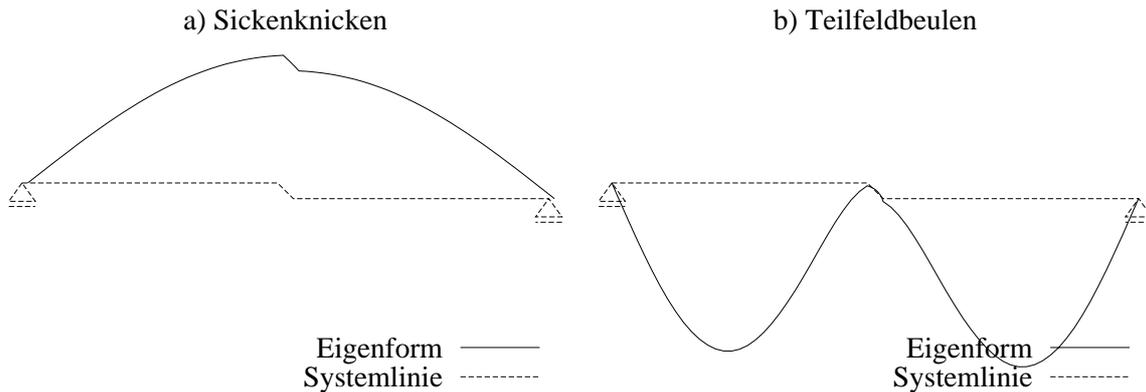


Abbildung A.18: Beulformen eines mit Schrägsicke ausgesteiften Bleches.

Auffällig ist, dass sich die Beulen in die gleiche Richtung ausbilden. Dies ist offensichtlich, wenn man die Verformung der Schrägsicke betrachtet. Sie erhält in diesem Versagensfall eine konstante Krümmung. Würden sich die Beulen in entgegengesetzte Richtungen ausbilden, so müsste die Verformungsfigur der Sicke einen Nulldurchgang aufweisen, was wiederum eine größere innere Arbeit mit sich brächte. Demzufolge gehen, wie der Darstellung in Abbildung A.19 zu entnehmen ist, die Grenzwerte für das Sickenknicken wiederum gegen 1 und für das zweiwellige Plattenbeulen wegen der vorhandenen Einspannung gegen 5.4, dem ideellen Beulwert der einseitig eingespannten Platte der halben Breite.

Die Untersuchung wurde für die Dicken  $t = 0.5, 1.0, 1.5$  und  $2.0$  mm durchgeführt. Der Einfluss der Schubverformung ist auch in diesem Falle zu vernachlässigen. Wie die Abbildung zeigt, nimmt der Einfluss der Schubelastizität mit der Dicke der Platte zu, jedoch liegen bei  $t = 0.5$  mm die Kurven noch direkt übereinander, bei  $t = 1.0$  mm kann man einen Unterschied erahnen, der sich ab einer Blechdicke von  $t = 1.5$  mm nicht mehr nennenswert vergrößert. Dies erstreckt sich über den ganzen untersuchten Bereich für  $h/b$ . Beim Versagen der Sicke bilden sich Beulfeldlängen von ca.  $\ell_B = 20$  bis  $\ell_B = 65$  cm aus. Diese sind zu lang als dass die Gleitung einen merklichen Einfluss auf die Verformungen haben könnte. Beim Beulen ist die Sicke durch die beiden Plattenebenen, die um ihre starke Achse eine hohe Federsteifigkeit aufweisen, horizontal unverschieblich gehalten und es ergibt sich daraus keine Verformung, die eine merkliche Scheibengleitung mit sich bringt.

Zur Querschnittsoptimierung ist wiederum zu bemerken, dass am Übergang vom Sickenknicken zum Plattenbeulen der günstigste Ausnutzungsgrad erreicht wird.

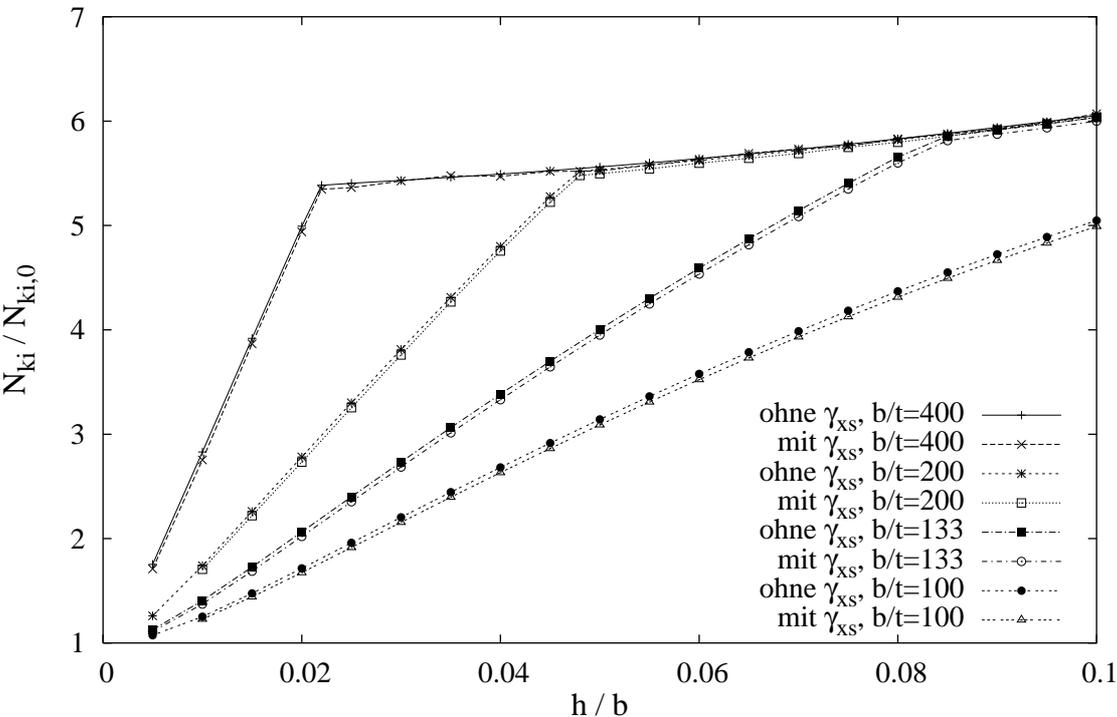


Abbildung A.19: Zum Stabilitätsverhalten eines mit Schräg-Sicke ausgesteiften Bleches.

# A Beispiele

UNIX VTB\_QEP Version 2.3 (c) 1987-1995 by \_ah 09.12.95 Nr.4800

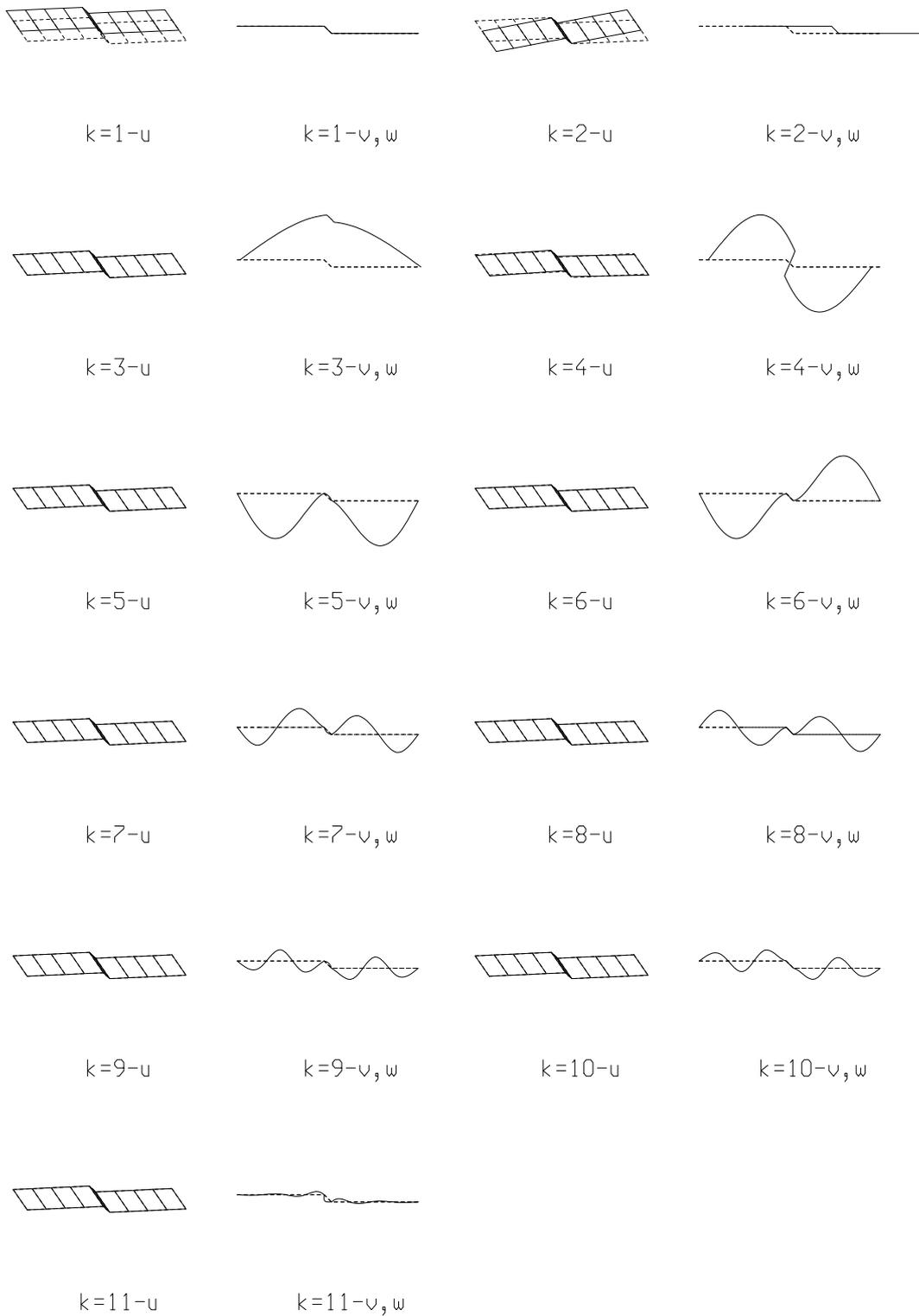


Abbildung A.20: Einheitszustände des Querschnittes mit Schräg-Sicke ohne Schubverformung.

## A.5 Der Einfluss der Schubverformung auf das Stabilitätsverhalten sickenversteifter Bleche

UNIX VTB\_QEP Version 2.3 (c) 1987-1995 by \_ah 09.12.95 Nr.4801

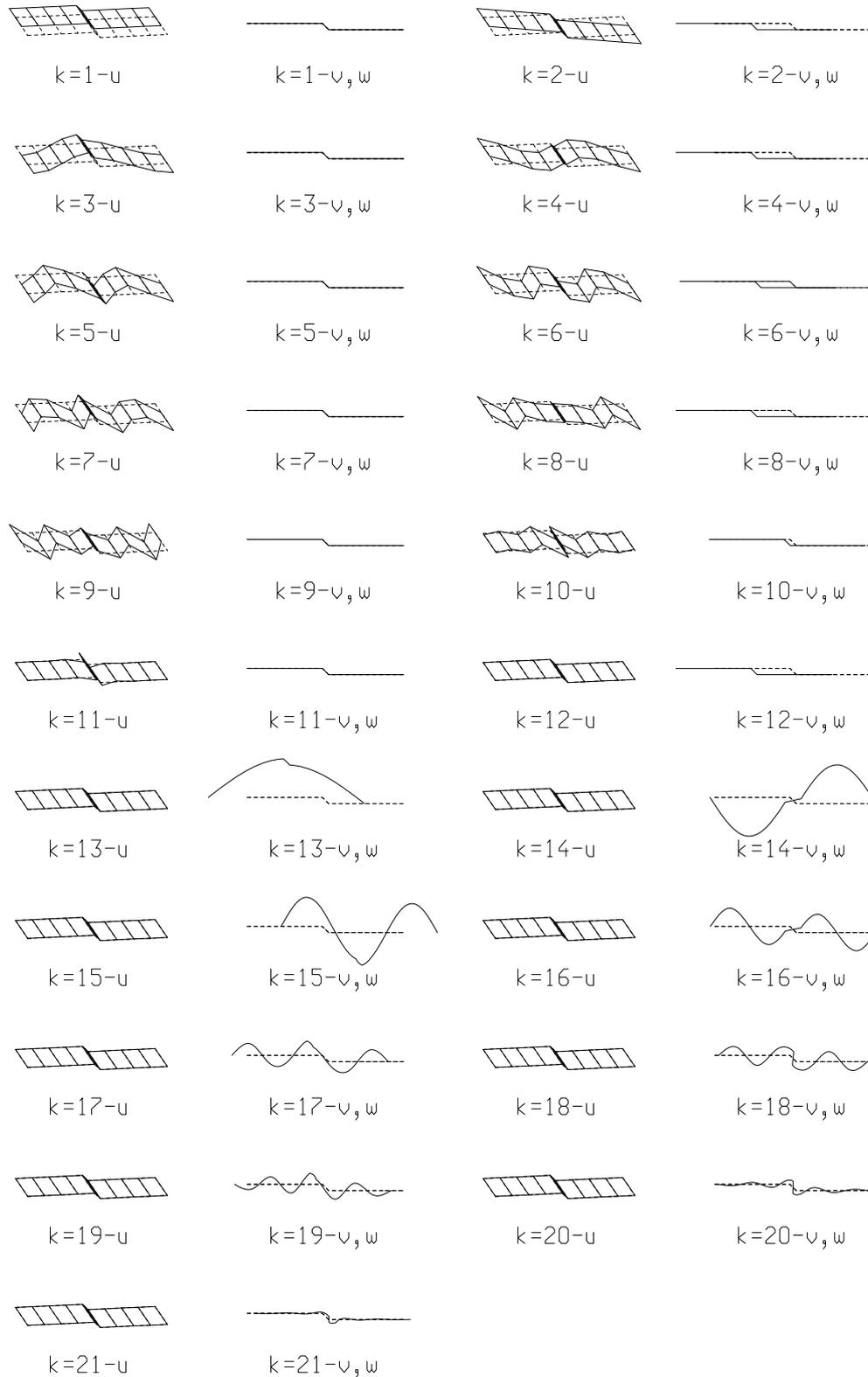


Abbildung A.21: Einheitszustände des Querschnittes mit Schräg-Sicke mit Schubverformung.

## *A Beispiele*

# B Programmbeschreibung

Die Programmbeschreibung beinhaltet die in dieser Arbeit entstandenen Programme in Hinblick auf ihre Stellung im System der VTB-Programme sowie ihre Anwendung, die darin enthaltene Datenstruktur und die verwendeten Arbeitsausdrücke, so dass für künftige Erweiterungen die notwendigen Definitionen gegeben sind.

Bei der Erstellung der Programme wurde ein Schritt durchgeführt, der zukunftsorientiert auch im Hinblick auf die Verbreitung dieser Theorie ausgerichtet ist. Alle Rechenteile wurden in der Programmiersprache C geschrieben. Dabei wurden die dieser Sprache zugrunde liegenden Vorteile (gegenüber dem bisher verwendeten FORTRAN 77), soweit standardisiert, genutzt.

Die Querschnittswertedatei (Voreinstellung des Namens ist `qwhaus.que` wurde neu definiert, und es wurden sowohl in FORTRAN (zur Kompatibilität mit den bestehenden Programmen) als auch in C Unterprogramme bereitgestellt, die problemlos das Schreiben und Lesen der Querschnittswerte in und aus einer ASCII-Datei bewerkstelligen.

## B.1 Das Programmsystem

Die im Rahmen dieser Arbeiten entstandenen Programme sind in unterschiedlichen Stufen in das Programmsystem der VTB integriert. So ist das Querschnittswerteprogramm, mit seiner Möglichkeit die gewünschten Freiheitsgrade auszuwählen, zur Basis neuer Programmversionen geworden. Die nachfolgend aufgeführten, bereits in früheren Versionen vorliegenden Programme können nach Theorie 1. und 2. Ordnung unter Verwendung der Freiheitsgrade Verwölbungen, Plattenfreiheitsgrade, Knotenverdrehungen und Membranschubverformungen eingesetzt werden. Der Freiheitsgrad Umfangsdehnungen ist wegen der komplexen Randbedingungen, die nicht mehr alleine zustandsweise formuliert werden kann, noch nicht fehlerfrei einsetzbar.

**DIF** Die Lösung der Differentialgleichungen mit dem zweistufigen Differenzenverfahren ist ein universelles Lösungsverfahren, das in der aktuellen Version sowohl die Berechnung nach Theorie 1. und 2. Ordnung als auch die Verzweigungsberechnung mit Eigenformen leistet. Dabei werden die Umlenkkräfte aus Längs- und Schubspannungen berücksichtigt. Für den allgemeinen Einsatz ist allerdings zu bemerken, dass kurzweilige Randstörungen übergangen werden, wenn die Feldteilung zu grob gewählt wurde. Außerdem benötigt dieses Verfahren sehr viel Speicherplatz, weshalb es auf kleinen Rechenanlagen nicht einsetzbar ist. Diese Einschränkung gilt nur noch begrenzt, da neue Generationen von PCs und Compilern größere Hauptspeicherbereiche zur Verfügung stellen.

**GSL** Geschlossene Lösung der VTB-Differentialgleichungen mit dem Exponentialansatz, auf Wunsch unter Berücksichtigung plastischer Reserven. Dieses Lösungsverfahren

ist für die Berechnung nach Theorie 1. Ordnung bei langen Stäben ohne Konkurrenz sowohl was die Rechenzeit als auch den Speicherplatzbedarf betrifft. Das Gleiche gilt für die Berechnung nach Theorie 2. Ordnung und die Lösung des Verzweigungsproblems, falls die Schnittgrößen nach Theorie 1. Ordnung konstant sind. Dies muss zumindest abschnittsweise erfüllt sein. Soll der tatsächliche Schnittgrößenverlauf durch eine Treppenkurve angenähert werden, so wird der Rechenaufwand relativ groß.

Für die beiden Lösungsverfahren DIF und GSL liegen gemeinsame Ein- und Ausgabeprogramme (DGE und DGA) vor. Die Ausgabe erfolgt grundsätzlich numerisch, jedoch ist für die Darstellung der Verformungen ein Graphikteil integriert.

### B.1.1 Das Querschnittswerteprogramm

Das Querschnittswerteprogramm besteht aus drei Teilen: dem Eingabeprogramm QPE, dem eigentlichen Rechenteil QEP und dem Ausgabeprogramm QPA.

#### Das Querschnittswerteingabeprogramm QPE

Es kann bereits vorhandene Querschnittswertedateien zur Abänderung der Daten einlesen oder Neueingabe verlangen. Der Ablauf ist dabei in beiden Fällen grundsätzlich gleich. Zunächst werden der Name der zu erstellenden Querschnittsdatei (Voreinstellung ist `qwhaus.que`) sowie die Kraft- und die Längeneinheit abgefragt. Bei Veränderung dieser Werte an einem eingelesenen Querschnitt werden die entsprechenden Abmessungen bzw. Steifigkeiten auf die neuen Einheiten umgerechnet. Danach folgen drei Menues, in denen die Knotenkoordinaten, die Scheibenzuordnungen zu den Knoten sowie die Scheibendicken und zuletzt die Lagerungsbedingungen für den Querschnitt abgefragt werden. In jedem dieser Menues ist es möglich, Eingaben anzuhängen, einzufügen oder zu löschen. Das Löschen von Knoten ist nur dann möglich, wenn keine Scheiben daran befestigt sind. Abschließend folgt die Eingabe einer optionalen Textzeile, der Materialkennwerte und der anzusetzenden Freiheitsgrade. Nach Beendigung der Eingabe werden die Eingabedaten in einer binären Datei (`QEPSSI.DAT`) abgespeichert, und das eigentliche Querschnittswerteprogramm QEP wird aufgerufen.

Für spezielle Anwendungen, vor allem bei der Durchführung von Parameterstudien, kann es sinnvoll sein spezielle Eingabeprogramme zu erstellen. So sind im Rahmen dieser Arbeit Eingabeprogramme entstanden die die Querschnitte für Schräg- und V-Sicken erstellen und die die erforderlichen Parameter als Argumente zum Programmaufruf erhalten. Die Quelltexte hierzu dienen als Muster.

#### Das Querschnittswerterechenprogramm QEP

Das Querschnittswerterechenprogramm besteht im Wesentlichen aus drei Modulen. Es handelt sich dabei um das Hauptprogramm `qep` und die Unterprogramme `qep_ah_z` und `qep_orth`. Sie werden nachfolgend beschrieben.

Das Hauptprogramm, dessen Flussdiagramm in Abbildung B.1 dargestellt ist, liest zunächst die Eingabedaten aus der Datei `qepssi.dat`, berechnet den erforderlichen Speicherplatzbedarf und ordnet ihn zu. Danach wird der Modul `qep_ah_z` aufgerufen, der

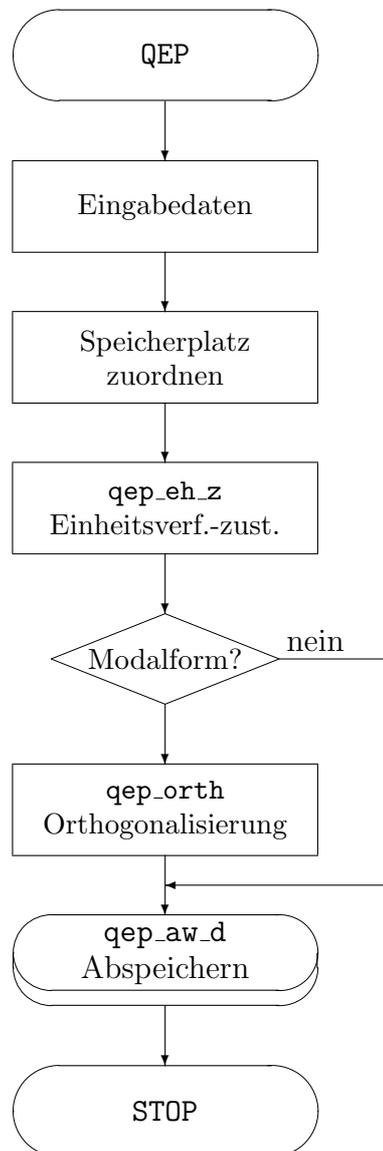


Abbildung B.1: Flussdiagramm des Programms QEP

die Grundzustände aufstellt. Falls eine normale Berechnung durchgeführt werden soll, wird nun die Orthogonalisierung der Zustände im Modul `qep_orth` durchgeführt. Dieser Schritt entfällt, wenn nur die Grundzustände aufgestellt werden sollen. Zuletzt werden die berechneten Zustände mittels des Unterprogramms `qep_aw_d` auf eine ASCII-Datei geschrieben, der verwendete Speicherplatz freigegeben und das Programm beendet.

Das Unterprogramm `qep_eh_z` (Abbildung B.2) erstellt die Grundzustände. Dies erfordert eine Reihe von Einzelschritten, die von den ausgewählten Verformungsansätzen abhängen. Zuerst werden  $2n_{Kn}$  Zustände aufgestellt, die die globalen  $v$ - und  $w$ -Verschiebungen der Knoten enthalten. Falls keine Umfangsdehnungen erwünscht sind, wird das Unterprogramm `q_el_eps` aufgerufen. Hier werden die geometrischen Bedingungen (keine Längung der Scheiben in  $s$ -Richtung) eingearbeitet. Als Nächstes werden die Lagerungsbedingungen überprüft. Falls Pendelstäbe oder Scheibeneinspannungen eingegeben wurden, so werden sie jetzt im Unterprogramm `q_el_pst` ebenfalls über geometrische Abhängigkeiten berücksichtigt.

Die so entstandenen Grundzustände werden nunmehr ergänzt durch  $n_{Kn}$  Verwölbungszustände (jeder Knoten erhält eine  $u$ -Verschiebung). Sind auch die elastischen Schubverformungen ausgeschlossen, so wird nunmehr die Routine `q_el_sch` aufgerufen, in der die Bedingung, dass keine Scheibe eine Scherung erhalten darf, eingearbeitet wird. Dabei bleibt allerdings für jede geschlossene Zelle ein Kreisschubfluss übrig! Zuletzt werden die Knotenverdrehungszustände hinzugefügt. Dabei werden eingespannte Knoten dadurch berücksichtigt, dass für sie erst gar kein eigener Zustand hinzugefügt wird. Sind die Knotenverdrehungen als eigene Freiheitsgrade nicht erwünscht, so werden sie mit dem Weggrößenverfahren in `q_el_phi` eliminiert. Davor ist allerdings die Matrix der Querbiegesteifigkeiten zu erstellen. Damit sind die Grundzustände komplett, und es erfolgt ein Rücksprung ins aufrufende Programm.

Für die so ermittelten Zustände sind nun die Arbeiten aufzustellen und die Orthogonalisierungen durchzuführen. Dies geschieht im Modul `qep_orth` und ist in Abbildung B.3 zu sehen. Für die erste Orthogonalisierung sind die Matrizen der Wölbsteifigkeiten  $\mathbf{C}$  und der Querbiegesteifigkeiten  $\mathbf{B}$  vonnöten. Sie werden in den beiden Unterprogrammen `qep_w_si` und `qep_w_qb` ermittelt. Danach wird der Eigenwertlöser `jacob_fd` aufgerufen, der die Orthogonalisierung mit gelegentlicher Auffrischung der Matrizen durchführt. Anschließend werden die Modalformen nach der Größe der Eigenwerte sortiert (die kleinsten zuerst) und die Verschiebungsmatrizen mit der mit der Matrix der Eigenformen multipliziert. Die Anzahl der entstandenen Nulleigenwerte gibt Auskunft darüber, wie viele Verschiebungs- und Schubzustände ( $n_B + n_D$ ) es gibt. Darunter fällt auch der eventuell vorhandene Verdrehzustand. Um diese voneinander zu trennen, wird die Matrix der vollständigen Schub-/Drillsteifigkeiten  $\mathbf{D}$  in `qep_d_12` ermittelt und anschließend über die  $n_B + n_D$  Zustände gegen die jetzt diagonale Matrix der Wölbsteifigkeiten orthogonalisiert. Wiederum werden die Eigenformen sortiert und die Verschiebungen mit den Modalformen multipliziert. Die Nulleigenwerte repräsentieren diesmal die Anzahl der Verschiebungszustände  $n_B$ . Um diese zu entmischen, werden in `qep_kap` die Abtriebsterme zum Normalkraftzustand  $\mathbf{K}$  berechnet, wiederum gegen die Wölbwiderstände orthogonalisiert, sortiert und die Verschiebungen abermals mit den Modalformen multipliziert. Es schließt sich noch die Normierung der Verschiebungs- und Schubzustände an. Danach folgt die Berechnung der  $D_2$ -Anteile der Schubsteifigkeiten in `qep_d_2m`, der Membrananteile des Wölbwiderstandes, zuallerletzt werden die aus dem Gleichgewicht stammenden, mit  $W'$

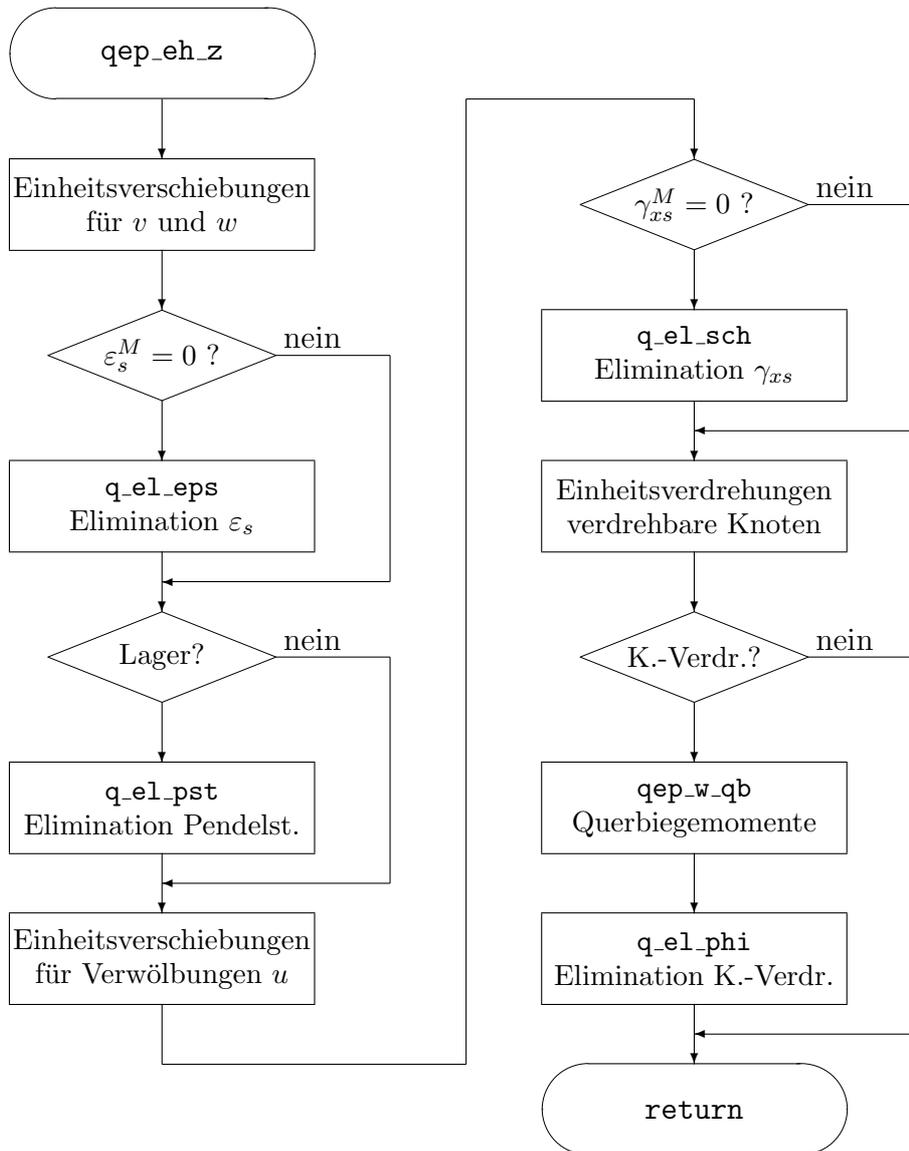


Abbildung B.2: Flussdiagramm des Unterprogramms qep\_eh\_z

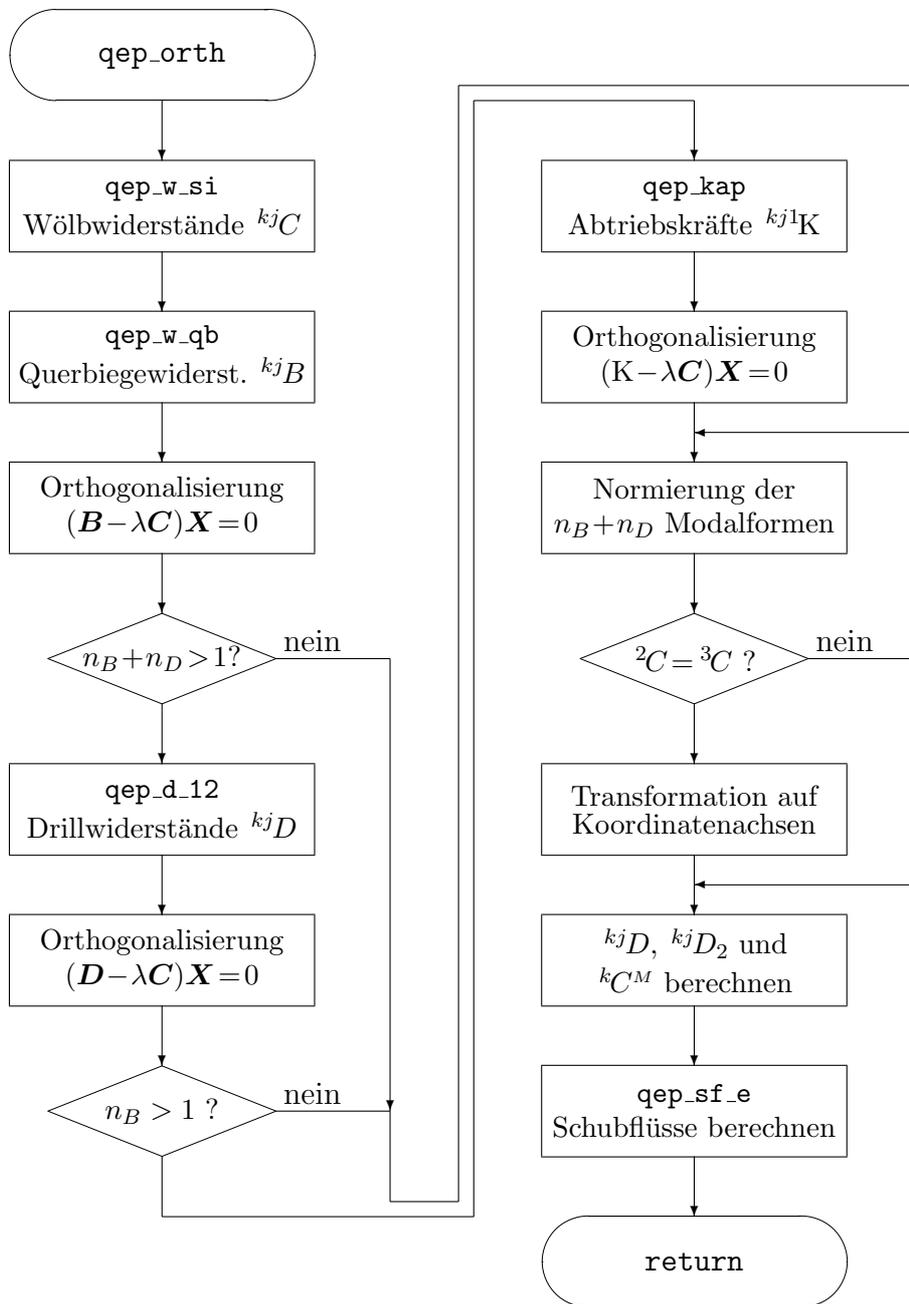


Abbildung B.3: Flussdiagramm des Unterprogramms qep\_orth

verbundenen Anteile der Scheibenschubflüsse an jedem Scheibenanfang in `qep_sf_e` unter Berücksichtigung der gewählten Freiheitsgrade und eventuell vorhandener geschlossener Zellen berechnet. Danach erfolgt der Rücksprung ins Hauptprogramm.

### Das Querschnittswerteausgabeprogramm QPA

Mit dem Ausgabeprogramm QPA können die Ergebnisse in Klarschrift oder als Graphik ausgegeben werden. Dies erfolgt sowohl für den Bildschirm als auch für die Druck-/Plotausgabe.

Der Umfang der Klarschriftausgabe wird in Abhängigkeit von den gewählten Freiheitsgraden gesteuert. Grundsätzlich wird ein Eingabeprotokoll erstellt. Die Ausgabe der Modalformen enthält immer die knotenbezogenen Verwölbungen  $u$ , die  $v$ - und  $w$ -Verschiebungen sowie die Verdrehungen  $\varphi$ . Hinzu kommen die Scheibenverschiebungen  $f_q$ ,  $f_s$  und -verdrehungen  $\vartheta$ . Dem schließen sich Scheibenschubflüsse am Scheibenanfang und die resultierende Scheibenschubkraft, beide aus Gleichgewicht, an. Bei Auswahl der Schubverformungen wird anstelle der Scheibenschubkraft der elastische Scheibenschubfluss ausgegeben. Bei Auswahl der Umfangsdehnungen wird zusätzlich die Längung der Scheiben in Umfangsrichtung ausgedruckt.

Die Graphikausgabe liefert die Darstellung der Zustände wahlweise in komprimierter oder erweiterter Form. Die komprimierte Form bildet alle Verschiebungskomponenten in einer räumlichen Darstellung ab (Abbildung A.3). In der erweiterten Form sind die Verwölbungen  $u$  in räumlicher Ansicht getrennt von den Verschiebungen  $v$  und  $w$  in ebener Ansicht dargestellt. Die räumliche Ansicht kann über die einzugebenden Ansichtswinkel verändert werden. Die Anzahl der Bilder pro Blatt lässt sich über die Anzahl der Bildzeilen und -spalten pro Seite steuern.

### B.1.2 Der Differentialgleichungslöser für den Reihenansatz

Die Eingabe erfolgt bisher über eine von Hand (Editor oder Textsystem) zu erstellende ASCII-Datei. Darin werden die Anzahl der Felder, Lager, Lastfälle sowie die detaillierten Beschreibungen der Feldlängen und ihrer (internen) Teilungen und die Lasten beschrieben. Außerdem enthält sie alle notwendigen Informationen über die Art der Berechnung und der evtl. benötigten Länge der Approximationspolynome.

### Das Differentialgleichungslöserprogramm DPL

Zur besseren Übersicht liegt auch hier in Abbildung B.4 ein Flussdiagramm vor. Zunächst werden aus der Eingabedatei, die beim Aufruf mit angegeben wird, die Dimensionierungsparameter eingelesen. Danach wird der zur Beschreibung des Längssystems erforderliche Speicherplatz ermittelt und dynamisch zugeordnet. Nachdem dies erfolgreich abgeschlossen wurde, werden die Daten eingelesen. In gleicher Weise wird beim Einlesen der Querschnittswerte und der Lastfälle vorgegangen. Falls eine Berechnung nach Theorie 2. Ordnung gefordert ist, werden die Felder für die drei Kappa-Matrizen zugeordnet und die Kappa-Kuben berechnet. Nach Abschluss dieser Vorarbeiten wird das eigentliche Rechenprogramm `dpl_sub` aufgerufen, in dem die eingegebenen Lastfälle berechnet werden. Der Rechenablauf hierzu ist in dem Flussdiagramm Abbildung B.5 dargestellt.

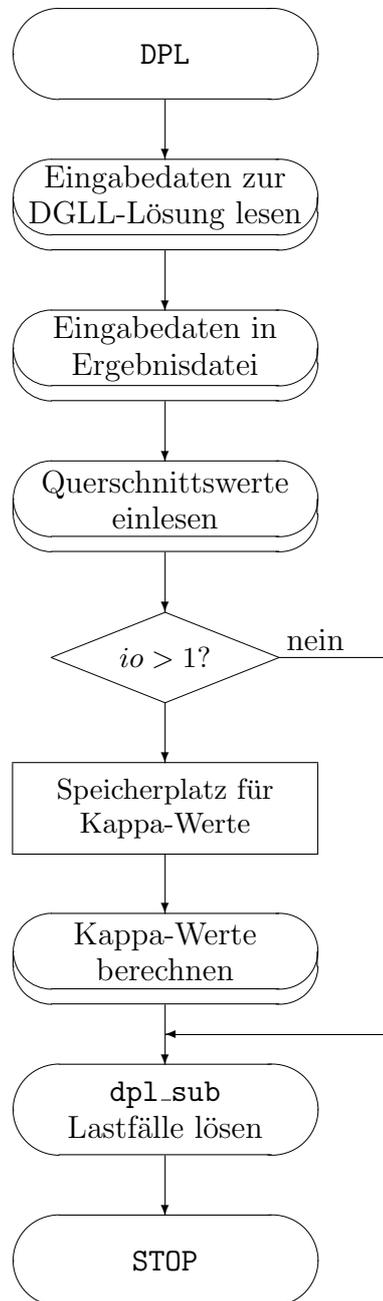


Abbildung B.4: Flussdiagramm des Programms DPL

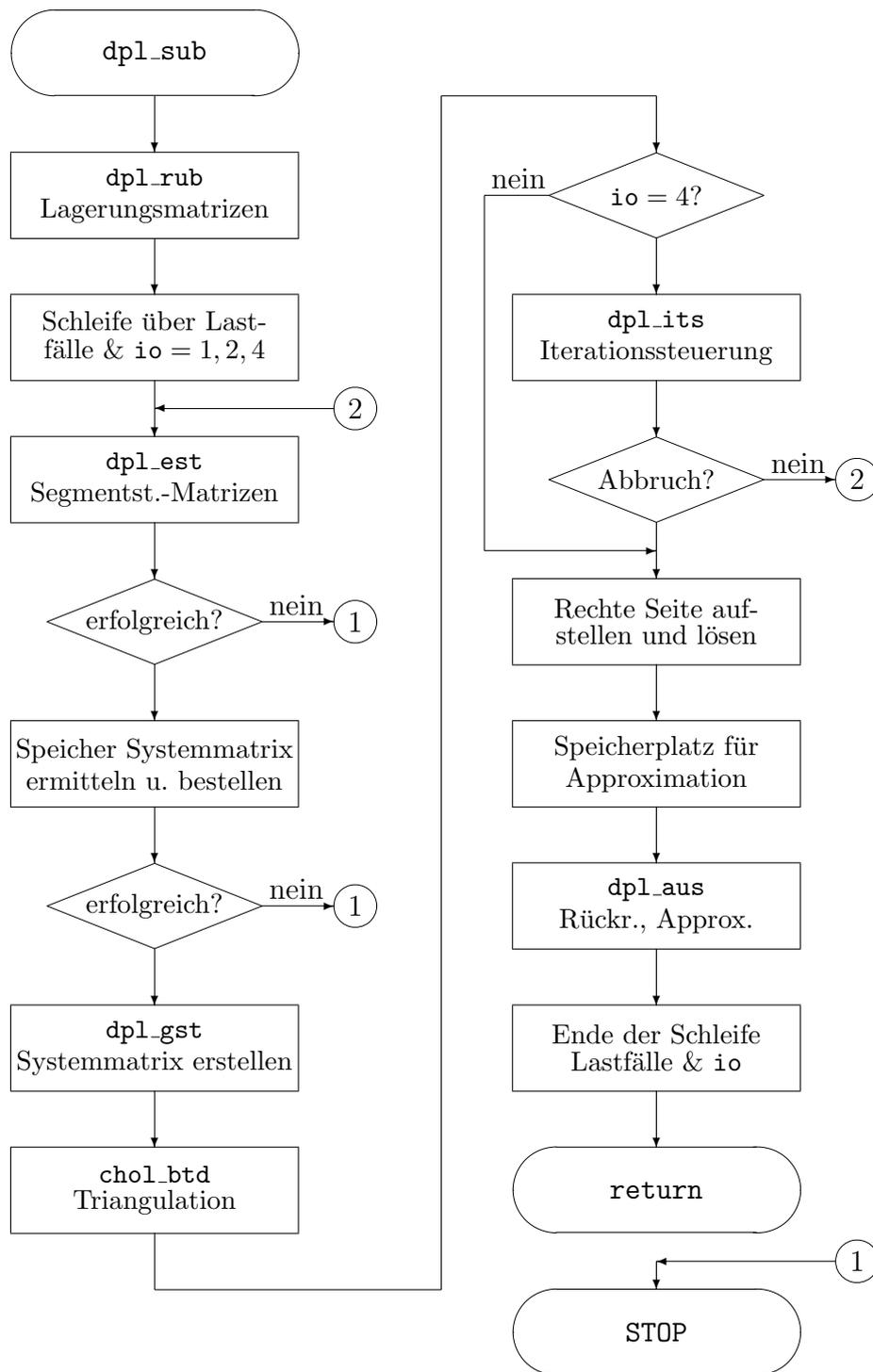


Abbildung B.5: Flussdiagramm des Unterprogramms dpl\_sub

Der erste Schritt in diesem Unterprogramm besteht darin, die Lagerungsbedingungen in eine für die weitere Handhabung adäquate Form zu bringen. Es werden die Matrizen aufgestellt, die die Beziehung zwischen den lokalen und den globalen Unbekannten widerspiegeln. Da dies von der Art der Belastung und der Berechnung unabhängig ist, erfolgt diese Berechnung nur einmal. Berücksichtigt werden alle in Kapitel 8.5 beschriebenen Lagerungsbedingungen: Zustandslager ebenso wie diskrete Lager.

Der Rest des Hauptunterprogramms `dpl_sub` ist von zwei Schleifen umgeben. Die erste läuft über die Anzahl der zu rechnenden Lastfälle, die zweite über die Berechnungsarten: Theorie 1. und 2. Ordnung sowie Lösung des Verzweigungsproblems mit dem Parameter `io = 1, 2` und `4`, der zur Steuerung des Rechenablaufs verwendet wird. Die Berechnung nach Theorie 1. Ordnung wird immer durchgeführt wenn eine Berechnung stattfindet.

Als erstes werden innerhalb dieser Doppelschleife die Segmentsteifigkeitsmatrizen erstellt. Nach Theorie 1. Ordnung nur einmal für jedes Feld, bei Berechnung nach 2. Ordnung für jedes Segment, da sie wegen der unterschiedlichen Vorbelastung auch verschieden ausfallen. Auf diese Weise kann auch bei auftretender Divergenz ganz bequem die Feldteilung vergrößert und die erforderlichen Felder auf die neue Dimensionierung angepasst werden. Um der Tatsache gerecht zu werden, dass nach Theorie 2. Ordnung die Polynome durch die Vorlasten länger werden, gibt es eine Toleranz die bei 20 Reihengliedern pro Zustand liegt. Dadurch wird üblicherweise Konvergenz nach 2. Ordnung erreicht. Falls die Reihenentwicklung nach 2. Ordnung dennoch divergieren sollte, so liegt der Eigenwert weit unter eins und die Berechnung wird mit einer entsprechenden Fehlermeldung abgebrochen. Alsdann wird der Speicherplatz, der für die beiden Steifigkeitsmatrizen nach Theorie 1. und 2. Ordnung benötigt wird, berechnet und bestellt. Im Anschluss wird die Funktion `dpl_gst` aufgerufen in der die Gesamtsteifigkeitsmatrix erstellt wird. Nacheinander werden die einzelnen Segmente in die Gesamtsteifigkeitsmatrix unter Beachtung der Lagerungsbedingungen eingearbeitet.

Nach erfolgreichem Aufbau der „gelagerten“ Gesamtsteifigkeitsmatrix erfolgt der Rücksprung ins aufrufende Programm mit einem Funktionswert von 0. Wurde die Berechnung nach 1. Ordnung durchgeführt, so wird die Systemmatrix umgespeichert, da sie bei der Lösung des Verzweigungsproblems vonnöten ist. Die Matrix liegt in bandsymmetrischer Form vor und wird in dem Unterprogramm `chol_btd` nach Cholesky in die obere rechte Dreiecksmatrix transformiert. Eine Inversion wird nicht durchgeführt, da dies nur unnötig Speicherplatz erfordert, da die Inverse einer Bandmatrix normalerweise voll belegt ist.

Bei Berechnung nach Theorie 1. oder 2. Ordnung erfolgt nun die Erstellung der rechten Seiten sowie die Lösung des Gleichungssystems. Im Falle der Behandlung des Verzweigungsproblems wird stattdessen die Funktion `dpl_its` aufgerufen, in der die Steuerung der Knicklastiteration mittels der Vektoriteration durchgeführt wird. Wenn das Iterationsergebnis nahe genug an der Verzweigungslast liegt, wird mit dem Berechnungsergebnis nochmals die Steifigkeitsmatrix Theorie 2. Ordnung erstellt. Sie wird benötigt, um in einem letzten Durchgang die Eigenform zu ermitteln. Dazu wird die rechte Seite mit einem vollkommen zufälligen Vektor belegt, da in der Nähe des Verzweigungspunktes stets die Eigenform in der Lösung durchschlägt. Der Lösungsvektor wird, da die Absolutwerte der Ergebnisse nur von der Nähe zur exakten Verzweigungslast abhängen, und außerdem ausschließlich der qualitative Verlauf der Verformungen interessieren, auf die maximale Ordinate 1 normiert. Bei der Berechnung nach Theorie 1. Ordnung und nachfolgend anstehender Lösung nach 2. Ordnung oder Verzweigungsberechnung wird in gewünschter

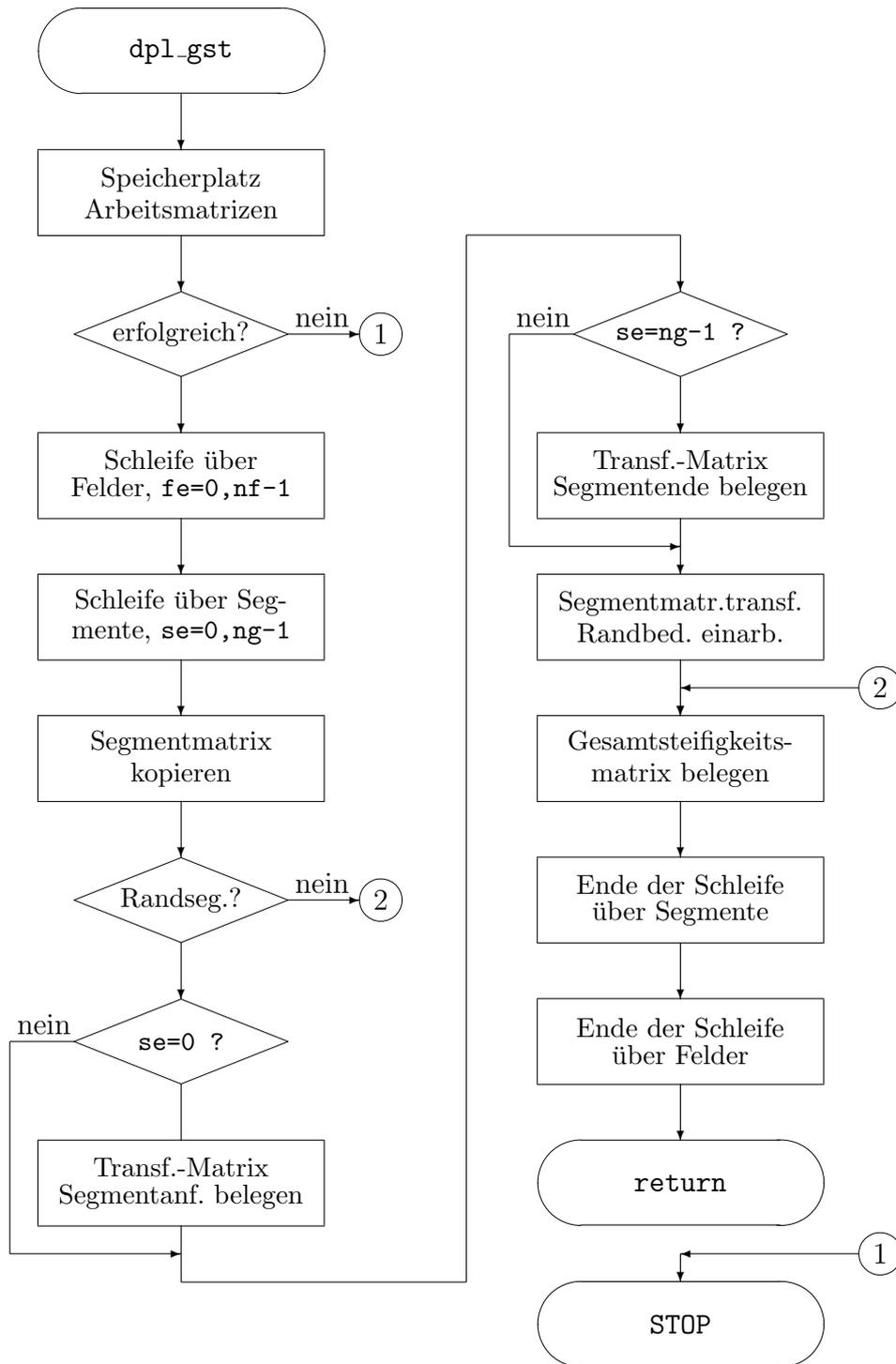


Abbildung B.6: Flussdiagramm des Unterprogramms dpl\_gst

Länge für jedes Segment der für die Approximationspolynome erforderliche Speicherplatz ermittelt und zugeordnet. Falls nicht ausreichend Speicherplatz zur Verfügung steht, führt dies wiederum zum Abbruch des Programms.

In jedem Falle wird als Nächstes das Unterprogramm `dpl_aus` durchlaufen. In einer Doppelschleife über alle Felder und Segmente werden für jedes Segment mittels der globalen-lokalen Abhängigkeiten die lokalen Weggrößen ermittelt. Da für jedes Segment nach Gleichung (8.9) die Matrix  $\mathbf{R}_{01}^{-1}$  vorliegt, können hiermit die freien Koeffizienten bestimmt und die Lösungspolynome entwickelt werden. Aus diesen Funktionen werden an den gewünschten Stellen die Verformungsfunktionen und deren erste drei Ableitungen berechnet und in der Ergebnisdatei abgespeichert. Diese sind von der internen Segmentteilung unabhängig. Maßgebend sind hier die angegebenen Teile pro Stab, die bei der Beschreibung des Längssystems angegeben wurden.

Wurde der Berechnungsgang nach Theorie 1. Ordnung durchgeführt wird zusätzlich die Approximation der numerisch exakten Lösung in der Routine `dpl_app` mit der festgelegten Länge durchgeführt.

### Das Differentialgleichungslöserausgabeprogramm DPA

Das Ausgabeprogramm erlaubt es die Ergebnisse, die in der Ergebnisdatei vorliegen, darzustellen. Die beinhaltet einerseits die Druckausgabe des Eingabeprotokolls, der Verformungsergebnisse und der Knotenverformungen zusammen mit den Spannungen für jeden Lastfall und jede Berechnungsart (Theorie 1. und 2. Ordnung sowie Verzweigungsproblem) sowie andererseits die graphische Darstellung der Ergebnisse. Diese beinhalten:

1. Die Verformungsfigur bzw. Eigenform
2. Die Verformungsergebnisse  ${}^kV$ ,  ${}^kV'$ ,  ${}^kV''$  und  ${}^kV'''$ .
3. Die Schnittgrößen  ${}^kW$  und  ${}^kS$ .
4. Die Plattenmomente  $m_{ss}$  und  $m_{xx}$ .
5. Die Spannungen  $\sigma_{x,mem}$  und  $\tau_{xs}$ .

Auf diese Art und Weise lassen sich die wesentlichen Ergebnisse übersichtlich darstellen. Um eine gewisse Vereinheitlichung zu erreichen, wurde das Ausgabeprogramm dahingehend ergänzt, dass es auch die Ergebnisse aus den Programmen GSL und DIF darstellen kann.

Die Benutzung des Programms ist denkbar einfach. Beim Aufruf wird der Name der Ergebnisdatei aus der Lösung der Differentialgleichung mit angegeben. Es werden sodann (wie beim Dgl.-Löser) die Eingabedaten und danach die Querschnittswerte eingelesen, der Ergebnisteil auf die vorhandenen Lösungen durchgesehen und vermerkt, welche Ergebnisse für die Ausgabe zur Verfügung stehen. Danach wird in einfach verständlicher Form ein Dialog aufgebaut in dem die darzustellenden Ergebnisse abgefragt werden.

Als Ausgabegeräte kann der Benutzer zwischen Bildschirm und Drucker wählen. Welcher Drucker unterstützt wird, hängt von der Installation ab.

### B.1.3 Der spezielle Differentialgleichungslöser für den Sinusansatz

Dieses sehr spezielle Programm DPS wurde erstellt um minimale Verzweigungslasten infolge Normalkraft mit dem Sinusansatz zu berechnen. Es ist kommandozeilenorientiert und benötigt keine Eingabedatei zur Beschreibung des Längssystems. Die Querschnittsdatei muss als Argument übergeben werden. Zusätzlich können sowohl Zustände ausgewählt als auch ein Vergleichswert für die Längsbelastung vorgegeben werden.

Es ermittelt zunächst für jeden einzelnen (ausgewählten und gebetteten) Zustand aus der Bedingung

$$\ell = \pi \sqrt[4]{\frac{EC}{B}}$$

die kritische Länge der separat betrachteten Einheitszustände und untersucht anschließend den Bereich

$$0.5 \cdot \ell_{min} \leq \ell \leq 3.5 \cdot \ell_{max}$$

auf die minimale Verzweigungslast (Normalkraft) der ausgewählten Zustände. Es werden zwei Ergebnisdateien erstellt. Eine enthält die Ergebnisse der Berechnung in Klarschriftausgabe, bestehend aus der (vorgegebenen) Normalkraft,  $\gamma_{ki}$ ,  $N_{ki}$ ,  $\sigma_{ki}$  und der zugehörigen Länge. Weiters werden die normierten Amplituden der Zustände als auch die Knotenverschiebungen ausgegeben. Die zweite Datei enthält die Daten mit dem Verlauf von  $\gamma_{ki}(\ell)$  sowie zwei Kurvendaten für die Darstellung des unverformten Querschnitts und der Beulform, die dann zur graphischen Darstellung weiterverwendet werden können.

Dieses Programm arbeitet sehr schnell und wurde für die Parameterstudien in Anhang A.4 und A.5 verwendet. Da alle zur Berechnung erforderlichen Parameter übergeben werden, eignet es sich in hohem Maße für Parameterstudien, die innerhalb eines Shell-Scripts ausgeführt werden können.

## B.2 Die Variablen des Programmsystems

Die nachfolgend zusammengestellten Variablen bzw. Datenstrukturen stellen nur den Teil dar, der für die Beschreibung des Stabes vonnöten ist. Bewusst wurde auf die Hilfsfelder und Variablen verzichtet, die nur lokal von Bedeutung sind.

Zum besseren Verständnis sei hier erwähnt, dass alle Variablen, die vor ihrem Namen einen \* tragen, Adressen sind, d.h. ihnen muss zunächst über die auf jedem C-Compiler vorhandene Routine `malloc` die Adresse des bestellten Speicherplatzes zugeordnet werden. Matrizen sind in C nicht variabel dimensionierbar; sie müssen als Felder angesprochen werden. Da jedes Feld bei dem Element 0 beginnt, z. B. `K[0]`, kann bei zeilenorientierter Matrizenanordnung, was hier der Fall ist, mit der bekannten Zeilendimension `nsp` das Matrizenelement  $K(i, j)$  als `K[i*nsp+j]` angesprochen werden.

Durch die Programmierung in C ist es möglich, Variablen verschiedenen Typs zu Einheiten zusammenzufassen. Dies wurde bei der Programmierung extensiv benutzt. Dadurch besteht auch die Möglichkeit, innerhalb verschiedener solcher komplexer Strukturen den gleichen Variablennamen zu verwenden. Um dem interessierten Anwender einen Überblick über die Datenstrukturen zu geben, werden nachfolgend die verwendeten Definitionen aufgelistet und kommentiert. Sie liegen alle in der Quelldatei `vtb_allg.h` vor. Diese Datei wird von allen Programmen und Unterprogrammen, die auf die VTB-Strukturen zugreifen, zu Beginn eingelesen. Dadurch entfällt eine in anderen Programmiersprachen erforderliche neue lokale Definition, was zum einen die Arbeit wesentlich verringert und zum anderen die Fehleranfälligkeit reduziert. Auch werden evtl. erforderliche Änderungen der Datenstrukturen durch erneutes Compilieren sofort in allen Routinen wirksam.

Zur Vereinfachung wurden noch spezielle Makro-Definitionen eingeführt, die den Umgang mit den Strukturen vereinfachen und bestimmte Dateinamen in Abhängigkeit vom verwendeten Betriebssystem festlegen. Diese seien vorweg aufgeführt.

```

#include "werkstoff.h"           Einfügen der Werkstoffstruktur die allgemein
                                (unabhängig von der VTB) vorliegt
#define _1_ORDNUNG 1             Für Abfrage nach Theorie 1. Ordnung
#define _2_ORDNUNG 2             Für Abfrage nach Theorie 2. Ordnung
#if defined MSDOS                 Definition für MS/DOS
#define VTB_NR_DAT "c:/vtb/flnr.dat"   Dateiname für Nr.
#define VTB_QE_DAT "c:/vtb/qepssi.dat"  Name der Eingabedatei zur Berech-
                                nung der Querschnittwerte
#define VTB_QEP_EX "c:/vtb/qep.exe"    Pfad zum Querschnittswerteprogramm
#elif defined VMS                 Definition für VAX/VMS
#define VTB_NR_DAT "usrdsk:[inslib.vtb_88]flnr.dat"
#define VTB_QE_DAT "sys$login:qepssi.dat"
#elif defined unix                 Definition für UNIX
#define VTB_NR_DAT "/usr/local/lib/vtb_flnr"
#define VTB_QE_DAT "qepssi.dat"
#define VTB_QEP_EX "/usr/local/bin/vtb.qep"
#endif                             Dgl.-Löser

```

### B.2.1 ... für die Querschnittswerte

|   |   |
|---|---|
| <pre> struct vtb_datum {     unsigned int Tag,                 Monat,                 Jahr,                 Nr; }; </pre>   | <p>Datenstruktur für das Datum an dem der Querschnitt berechnet wird.</p> <p>Tag</p> <p>Monat</p> <p>Jahr</p> <p>Nummer zur Identifikation der Berechnung. Wird aus <code>flnr.dat</code> gelesen und dort erhöht.</p>  |
| <pre> struct vtb_qb {     char  p_id[81],          Text[81];     float ly,lz;      struct QuerZust {          int    S,               Kn,               V.K,               E.K,               LA,               Z,               B.Z,               D.Z,               U.2, U.0               E.Q;     } N;     struct vtb_datum D;     struct Freiheitsgrade {          int    u,               p,               g,               s,               r;     } NY;     struct Knoten { </pre> | <p>Struktur zur Beschreibung des Querschnitts</p> <p>Zeichenkette enthält Identifikation der Programmversion</p> <p>Textfeld zur Querschnittsbeschreibung</p> <p>Die maximalen Querschnittsabmessungen in <i>y</i>- und <i>z</i>-Richtung</p> <p>Struktur enthält zählbare Parameter wie Anzahl der:</p> <p>Scheiben</p> <p>Knoten</p> <p>Verzweigungsknoten</p> <p>Endknoten</p> <p>Lager</p> <p>Zustände</p> <p>Verschiebungszustände</p> <p>Schubzustände</p> <p>—</p> <p>Einzelquerschnitte</p> <p>Variablen-Name</p> <p>Datum, siehe oben.</p> <p>Struktur der gewählten Freiheitsgrade (<math>\neq 0</math>: Verformungsfreiheitsgrad ausgewählt, 0: Freiheitsgrad unterdrückt).</p> <p>Verwölbungen (immer 1)</p> <p>Plattenverformungen (immer 1)</p> <p>Membranschubverzerrung</p> <p>Umfangsdehnung</p> <p>Knotenverdrehungen (1: alle Knoten, -1: nur die Endknoten)</p> <p>Variablen-Name</p> <p>Struktur zur Beschreibung der Knoten</p> |

## B Programmbeschreibung

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| float y,z;                      | $y$ - und $z$ -Koordinaten   |
| int is;                         | Anzahl der Scheiben am Knoten  |
| } *K;                           | Adresse des Feldes (Variablen-Name)  |
| struct Scheibe {                | Struktur zur Beschreibung der Scheiben   |
| int be[2];                      | Knotenindex Anfang/Ende  |
| float a,                        | Neigung in Grad  |
| b,                              | Breite   |
| t,                              | Dicke  |
| k;                              | Plattensteifigkeit   |
| } *S;                           | Adresse des Feldes (Variablen-Name)  |
| struct Lager {                  | Struktur zur Beschreibung der Lager  |
| int Typ,                        | Art des Lagers   |
| sk;                             | Index Scheibe/Knoten   |
| float a,                        | Neigung $\alpha$ falls vorhanden   |
| k;                              | evtl. Federsteifigkeit   |
| } *L;                           | Adresse des Feldes (Variablen-Name)  |
| struct Werkstoff W;             | Variablen-Name der Struktur mit den Werkstoffkenngrößen                            |
| };                              |  |
| typedef struct vtb_qb vtb_qb_t; | Definition als Typ   |
| struct vtb_qw {                 | Struktur der Querschnittswerte   |
| struct Verformungen {           | Struktur der Querschnittsverformungen enthält die Adressen der Matrizen der        |
| double *u ,                     | Verwölbungen $u$   |
| *v ,                            | Knotenverschiebungen $v$   |
| *w ,                            | Knotenverschiebungen $w$   |
| *r ,                            | Knotenverdrehungen $\varphi$   |
| *up,                            | Parabolischen Scheibenverwölbungsanteile $\check{u}$ (gegenwärtig nicht verwendet) |
| *q ,                            | Scheibenquerverschiebungen $\bar{f}$   |
| *t ,                            | Scheibenverdrehungen $\vartheta$   |
| *sm,                            | Scheibenlängsverschiebungen $\bar{f}_s$  |
| *sd,                            | Scheibenlängung/2 $\hat{f}_s$  |
| *sp;                            | weitere Scheibenlängsverschiebung (gegenw. nicht verwendet)                        |
| } V;                            | Variablen-Name   |
| struct Widerstaende {           | Struktur der Verformungswiderstände, enthält die Felder der                        |
| double *C,                      | Gesamtwölbwiderstände $\mathbf{C}$ (Vektor)  |
| *Cm,                            | Membranwölbwiderstände $\mathbf{C}_m$ (Vektor)                                     |
| *Dg,                            | Gesamtdrillwiderstände $\mathbf{D}$  |

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| *D2,                            | Anteil zu den Drillwiderständen                                  |
| *B;                             | Bettungs- bzw. Querbiege­widerstand <b>B</b>                     |
| } W;                            | Variablen-Name   |
| struct Schnittgr {              | Struktur der Querschnitts­schnitt­größen ent­hält die Felder der |
| double *Sf,                     | Schubflüsse aus Gleichgewicht (Dübelformel)                      |
| *Sk;                            | Adresse des Feldes (Variablen-Name)                              |
| } M;                            | Variablen-Name Querschnittsverformungen                          |
| };                              |  |
| typedef struct vtb_qw vtb_qw_t; | Definition als Typ   |

### B.2.2 ... für die Lösung der Differentialgleichung

Bei den hier definierten Variablen wurde der Möglichkeit Rechnung getragen, dass evtl. bereits vorhandene Programme oder in anderen Programmen enthaltene Erweiterungen (z. B. plastische Berechnung) mittelfristig in C umgeschrieben bzw. hier integriert werden. Deshalb liegen hier einige Definitionen vor, die zur Zeit noch nicht verwendet werden.

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| struct vtb_qs {                 | Struktur zur Definition des Querschnitts.  |
| char dat_quer[80];              | Name der Querschnittswertedatei (Voreinstellung: QWHAUS.QUE[R])                              |
| int    kz,                      | Anzahl der gewählten Verformungszustände   |
| *z,                             | Indizes der gewählten Verformungszustände  |
| kl,                             | Anzahl der ausgewählten Lastzustände (in DPL $\equiv$ kz, hier gegenwärtig nicht verwendet). |
| *l;                             | Indizes der ausgewählten Lastzustände (in DPL $\equiv$ *z, hier gegenwärtig nicht verwendet) |
| double *kxx,                    | Adresse der $\kappa_{\sigma,x}$ -Werte   |
| *kxs,                           | Adresse der $\kappa_{\sigma,s}$ -Werte   |
| *ksx,                           | Adresse der $\kappa_{\sigma_s,x}$ -Werte   |
| *kss,                           | Adresse der $\kappa_{\sigma_s,s}$ -Werte   |
| *ktg,                           | Adresse der $\kappa_{\tau,g}$ -Werte   |
| *kte;                           | Adresse der $\kappa_{\tau,e}$ -Werte   |
| vtb_qb_t b;                     | Querschnittsbeschreibung   |
| vtb_qw_t w;                     | Querschnittswerte  |
| };                              |  |
| typedef struct vtb_qs vtb_qs_t; | Definition als Typ   |
| struct vtb_dg {                 | Struktur für die Dgl.-Lösung   |
| int    Verfahren;               | Index für Berechnungsverfahren (hier gegenwärtig nicht verwendet)                            |

## B Programmbeschreibung

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| <code>char Text[132],</code>     | Optionale Textzeile  |
| <code>dat_dgll[80],</code>       | Name der Ergebnisdatei der Dgl.-Lösung   |
| <code>dat_list[80],</code>       | Name der Druckdatei der Ergebnisse   |
| <code>*id;</code>                | Adresse zur Aufnahme der Identifikation der Programmversion  |
| <code>float sig_f;</code>        | Fließ-Spannung (gegenwärtig nicht verwendet)   |
| <code>struct ein_param {</code>  | Parameter zur Beschreibung des Längssystems. Enthält die Anzahl der  |
| <code>int q,</code>              | Querschnitte (vorerst immer 1)   |
| <code>nf,</code>                 | der Felder   |
| <code>nl;</code>                 | und der Lager  |
| <code>} N;</code>                | Variablen-Name   |
| <code>struct vtb_datum D;</code> | Datum und Nr. der Berechnung   |
| <code>vtb_qs_t *q;</code>        | Feld der einzulesenden Querschnitte  |
| <code>struct vtb_laengs {</code> | Struktur für die Beschreibung des Längssystems   |
| <code>int mz,</code>             | Die folgenden 3 Werte sind für künftige Erweiterungen auf mehrere Querschnitte gedacht. Sie werden bereits passend belegt. |
| <code>mk,</code>                 | Maximal vorhandene Zustände  |
| <code>ms;</code>                 | Maximal vorhandene Knoten  |
| <code>struct vtb_felder {</code> | Maximal vorhandene Scheiben  |
| <code>int q,</code>              | Struktur zur Beschreibung der Felder   |
| <code>a,</code>                  | Index Querschnitt (vorerst immer 0)  |
| <code>t;</code>                  | Abschnitte für die Ausgabe   |
| <code>float l;</code>            | Teilung in DGLL (Segmente)   |
| <code>int gl, gr;</code>         | Länge des Abschnitts   |
| <code>int *xl, *xr;</code>       | Anzahl der globalen Unbekannten für diesen Stab (links/rechts)   |
| <code>double *tl, *tr;</code>    | Inzidenzvektor für Elimination   |
| <code>struct elm_v01 {</code>    | Adresse der Transformationsmatrizen lokal → global (links/rechts).   |
| <code>double *elm,</code>        | Elementsteifigkeitsmatrix im Symmetrischen Speichermodus   |
| <code>*v01;</code>               | Adresse der Matrix v01 für Rückrechnung  |
| <code>} t1o;</code>              | Th. 1. Ordnung (1-mal pro Feld)  |
| <code>struct Segment {</code>    |  |
| <code>double *ak,</code>         | Vektor der freien Koeffizienten zur DGL  |
| <code>*rs;</code>                | Belastungsvektor   |

## B.2 Die Variablen des Programmsystems

|  |  |
|--|--|
| <pre>                 struct elm_v01 t2o;             } *s;         } *f;         struct vtb_lager {             int stelle,                 knoten,                 typ;             float r[3];         } *l;     } lb; }; typedef struct vtb_dg vtb_dg_t; </pre>  | <p>Th. 2. Ordnung (1 mal pro Segment)<br/>                 Adresse der Segmente (Variablen-Name)<br/>                 Adresse des Feldes<br/>                 Struktur zu Beschreibung der Lager<br/>                 Abschnittsgrenze<br/>                 Lagertyp<br/>                 Lagertyp<br/>                 Komponenten der Lagerung<br/>                 Adresse des Feldes der Lagerstrukturen<br/>                 Variablen-Name Längsbeschreibung</p> <p>Definition als Typ</p>   |
| <pre> struct vtb_dl {     int faelle;     struct Vorlasten {          int LaeA;          double **Wko;      } *Vl;     struct last_faelle {         int io,          ipl;          struct last_f_zaeher {             int E,                 S,                 V;          } N;         struct {             int    feld,                 zu_kn;              float px,                 py,                 pz;          } *E;     } </pre> | <p>Struktur zur Beschreibung der Lasten<br/>                 Anzahl der Lastfälle<br/>                 Struktur für die Vorlasten (Schnittgrößen nach Theorie 1. Ordnung).<br/>                 Ordnung (früher einmal die Länge) des Approximationspolynoms<br/>                 Adresse der Adressen der Approximationspolynome (Theorie 1. Ordnung)<br/>                 Adresse der Vorlasten (Variablen-Name)<br/>                 Struktur zur Beschreibung der Lastfälle<br/>                 Berechnungsart: Summe aus den gewünschten Berechnungsmöglichkeiten: 1, 2 (Theorie n. Ordnung) sowie 4 (bei Verzweigungsproblem).<br/>                 Plastische Berechnung (gegenw. nicht verwendet)<br/>                 Struktur gibt Anzahl der Lasttypen an wie Einzellasten<br/>                 Streckenlasten<br/>                 Vorverformungen (gegenwärtig nicht verwendet)<br/>                 Variablen-Name<br/>                 Struktur für die Einzellasten<br/>                 Index der Feldgrenze der Last<br/>                 Knotenindex<br/> <math>x</math>-Komponente<br/> <math>y</math>-Komponente<br/> <math>z</math>-Komponente<br/>                 Adresse des Feldes der Einzellasten</p> |

## B Programmbeschreibung

|  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| <pre>    struct {</pre>                    | Struktur für die Streckenlasten       |
| <pre>        int    feld,</pre>            | Feldindex der Last                    |
| <pre>            zu_kn;</pre>              | Knotenindex                           |
| <pre>        float py[2],</pre>            | <i>y</i> -Komponente Anfang/Ende      |
| <pre>            pz[2];</pre>              | <i>z</i> -Komponente Anfang/Ende      |
| <pre>    } *S;</pre>                       | Adresse des Feldes der Streckenlasten |
| <pre>    } *last_f;</pre>                  | Adresse des Feldes der Lastfälle      |
| <pre>};</pre>                              |                                       |
| <pre>typedef struct vtb_dl vtb_dl_t;</pre> | Definition als Typ                    |

## B.3 Die weitere Entwicklung des Programmsystems

Zusätzlich zu den hier beschriebenen C- und FORTRAN-Versionen wurde eine komplett neue Programm-Version in Java<sup>TM</sup> geschrieben. Diese ist im Wesentlichen wie die C-Version strukturiert, fasst allerdings unter einer graphischen Oberfläche die Komponenten Eingabe, Berechnung mit Ausgabe sowohl für die Querschnittswerte als auch für die Berechnung des Differentialgleichungssystems mit dem Reihenansatz zusammen. Die interaktive Darstellung der Stabverformungen und der Spannungen in 3-dimensionaler Ansicht wurde stark verbessert. Das Format der Eingabe- und Ergebnisdateien wurde komplett überarbeitet und nun (zeitgemäß) in XML formuliert. Schnittstellen zu den bisherigen Datei-Formaten bestehen weiterhin. Neu ist die interaktive Eingabe des Längssystems sowie die Möglichkeit, Lastfälle in Lastkombinationen mit unterschiedlichen Lastfaktoren zu kombinieren. Der Rang des Approximationspolynoms, der ursprünglich ein globaler Parameter war, wird nun für jede Lastkombination getrennt festgelegt, sofern eine Berechnung nach Theorie 2. Ordnung erfolgt. Es ist geplant, auch die C-Version auf die neuen Datei-Formate umzustellen, da sie wesentlich flexibler sind und sich weitere Ergänzungen leicht implementieren lassen, ohne bestehende Versionen zu stören. Damit wird es auch erforderlich, die Last-Kombinatorik zu ergänzen. Durch konsequente objektorientierte Programmierung in Verbindung mit klar definierten Schnittstellen (Interfaces) bietet die Java<sup>TM</sup>-Version einfache Möglichkeiten andere Ansatzfunktionen für die Querschnittswerte oder die Lösung der Differentialgleichung zu implementieren, ohne das gesamte Programm überarbeiten zu müssen.

Diese Version ist als Ergänzung des bestehenden Programmsystems zu betrachten, nicht als dessen Ersatz. Durch die Unabhängigkeit von der Rechner-Architektur kann es auf allen gängigen Betriebssystemen eingesetzt und weiterentwickelt werden. Alle erforderlichen Hilfsmittel, die für die Verwendung von XML benötigt werden, sind bereits in Java<sup>TM</sup> enthalten und müssen nicht erst „zusammengesucht“ oder entwickelt werden. Für die Programmentwicklung stehen freie, leistungsfähige IDEs zur Verfügung.

Die bestehenden C- und FORTRAN-Versionen sind auch weiterhin unschlagbar, wenn es darum geht, rechenintensive Beispiele zu bearbeiten oder Parameterstudien durchzuführen.

## *B Programmbeschreibung*

# Literaturverzeichnis

- [1] BALÁZ, IVAN: *Dünnwandige Stäbe mit offenem oder geschlossenem deformierbarem Querschnitt*. Der Stahlbau, 68:70–77, 1999.
- [2] BLATTER, C.: *Analysis I*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.
- [3] BORN, J.: *Faltwerke*. Verlag Konrad Wittner, Stuttgart, 1954.
- [4] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Zürich Frankfurt/Main Thun, 1976.
- [5] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN 4114*. Beuth Verlag GmbH, Berlin und Köln, Juli 1952.
- [6] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN 18800 Teil 2: Stahlbauten; Knicken von Stäben und Stabwerken*. Beuth Verlag GmbH, Berlin und Köln, November 1990.
- [7] FRIEMANN, H.: *Schub und Torsion in geraden Stäben*. Werner-Verlag, Düsseldorf, 1983.
- [8] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg New York, 1963.
- [9] GIRMSCHIED, G.: *Ein Beitrag zur verallgemeinerten Technischen Biegetheorie unter Berücksichtigung der Umfangsdehnungen, Schubverzerrungen und großer Verformungen*. Doktorarbeit, Technische Hochschule Darmstadt – D17, 1984.
- [10] HAAKH, A.: *Die Schnittgrößenermittlung an Stützen-Pfahl-Systemen nach Theorie 1. und 2. Ordnung bei veränderlicher Bettung und Biegesteifigkeit mit dem Reihenansatz*. C-Programm, 1989.
- [11] HANF, M.: *Die geschlossene Lösung der linearen Differentialgleichungssysteme der Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie mit einer Anwendung auf die Ermittlung plastischer Grenzlasten*. Doktorarbeit, Technische Hochschule Darmstadt – D17, 1989.
- [12] HANF, M.: *Eine Erweiterung der Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie zur Erfassung von Scheibenschubverzerrungen*. Der Stahlbau, 79(2):109ff, 2010.
- [13] HANF, M. und A. HAAKH: *Die Ermittlung der Beulsicherheit ausgesteifter Platten unter Längs- und Schubspannungseinflüssen mit der VTB*. FORTRAN-Programm, 1989.
- [14] HEILIG, R.: *Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform*. Der Stahlbau, 30(11):333–349, 1961.

## Literaturverzeichnis

- [15] HEILIG, R.: *Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Querschnitt*. Der Stahlbau, 30(4):97ff, 1961.
- [16] HEINZ, D. und H.-J. MARK: *Statisch nichtlineare Berechnungen mit der Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie*. In: *Festschrift Richard Schardt – 60 Jahre*, 1990.
- [17] HEPPNER, K.-U.: *Die Berechnung von geometrisch und statisch nichtlinearen Schwingungen von vorwiegend längs beanspruchten, prismatischen Schalen mit Hilfe der Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie*. Doktorarbeit, Technische Hochschule Darmstadt – D17, 1997.
- [18] HERSCHEL, F. G.: *Methoden der Ingenieurmathematik*. In: *Stahlbau – Handbuch 1*. Stahlbau-Verlags-GmbH, Köln, 1. Auflage, 1982.
- [19] KERNIGHAN, BRIAN W. und DENNIS M. RITCHIE: *Programmieren in C*. Carl Hanser Verlag, München Wien, 1983. Die deutsche Ausgabe besorgten Prof. Dr. A. T. Schreiner und Dr. Ernst Janich.
- [20] KLÖPPEL, K. und J. SCHEER: *Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten*. W. Ernst & Sohn, Berlin, 1960.
- [21] MESCHKOWSKI, H.: *Handbuch über die Mathematik*. MEYERS. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1972.
- [22] MIOSGA, G.: *Vorwiegend längsbeanspruchte dünnwandige prismatische Stäbe und Platten mit endlichen elastischen Verformungen*. Doktorarbeit, Technische Hochschule Darmstadt – D17, 1982.
- [23] MÖLLER, R.: *Zur Berechnung prismatischer Strukturen mit beliebigem, nichtformtreuen Querschnitt*. Bericht 2, Institut für Statik der TH Darmstadt, 1982.
- [24] RUBIN, H.: *Eine einheitliche Formulierung des ebenen Stabproblems bei Berücksichtigung von M- und Q-Verformungen, Theorie I. und II. Ordnung, elastischer Bettung einschließlich Drehbettung sowie harmonischer Schwingungen*. Der Bauingenieur, 63:195–204, 1988.
- [25] RUBIN, H.: *Einheitliches Lösungskonzept für den Stab mit linear veränderlicher Höhe nach Theorie I. und II. Ordnung auf der Grundlage einer analytischen Formulierung*. In: *Festschrift Richard Schardt – 60 Jahre*, 1990.
- [26] SAAL, G.: *Ein Beitrag zur Schwingungsberechnung von dünnwandigen, prismatischen Schalenträgwerken mit unverzweigtem Querschnitt*. Doktorarbeit, Technische Hochschule Darmstadt – D17, 1974.
- [27] SCHARDT, R.: *Die genaue Ermittlung der Biegedrillknicklasten mehrfeldriger mittig gedrückter Stäbe mit einfachsymmetrischem, offenen Querschnitt und beliebiger Lagerung an den Knoten nach dem Formänderungsgrößenverfahren*. Der Stahlbau, 31(9):257–270, 1962.

- [28] SCHARDT, R.: *Eine Erweiterung der technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Faltwerke*. Der Stahlbau, 35(6&12):161–171&384, 1966.
- [29] SCHARDT, R.: *Zur Berechnung von Pfetten aus Kaltprofilen*. In: *Festschrift Otto Jungbluth – 60 Jahre*, 1978.
- [30] SCHARDT, R.: *Die Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1. Auflage, 1990.
- [31] SCHRADER, W.: *Ein Beitrag zum Stabilitätsnachweis dünnwandiger, durch Bindebleche versteifter Stäbe mit offenem Querschnitt*. Doktorarbeit, Technische Hochschule Darmstadt – D17, 1984.
- [32] WLASSOW, W.S.: *Dünnwandige Stäbe*. VEB–Verlag für Bauwesen, 1963.
- [33] ZURMÜHL, R.: *Matrizen und ihre technischen Anwendungen*. Springer–Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1958.
- [34] ZURMÜHL, R. und S. FALK: *Matrizen und ihre Anwendungen, Teil 1 und 2*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 5. überarbeitete und erweiterte Auflage, 1984.

*Literaturverzeichnis*